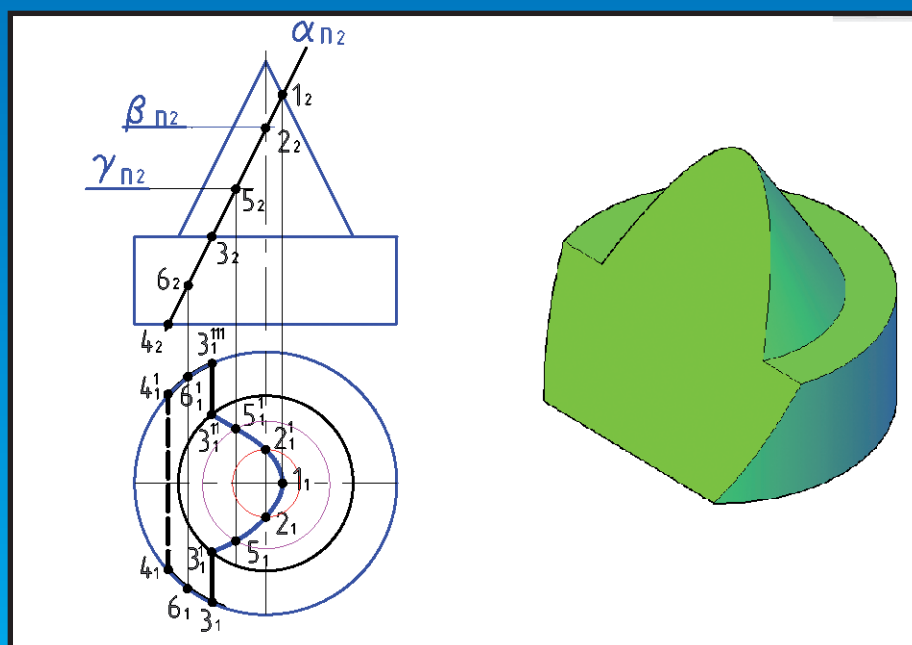


**Т. И. КИРИЛЛОВА
Л. В. СОЛОВЬЁВА-ГОГОЛЕВА
Л. Ю. СТРИГАНОВА**

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ПОВЕРХНОСТИ, ПОВЕРХНОСТЕЙ

Учебное пособие



Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Т. И. Кириллова, Л. В. Соловьёва-Гоголева, Л. Ю. Стриганова

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

Относительное положение плоскости и поверхности, поверхностей

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов, обучающихся по направлениям подготовки
08.03.01 «Строительство», 08.05.01 «Строительство
уникальных зданий и сооружений»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2017

УДК 744(075.8)
ББК 30.11я73-5
К43

Рецензенты:

канд. пед. наук, доц. *Н. Н. Мичурова* (зав. кафедрой общетехнических дисциплин Уральского института государственной противопожарной службы МЧС РФ по делам ГО, ЧС и ликвидации последствий стихийных бедствий); д-р техн. наук, проф. *А. П. Коммисаров* (Уральский государственный аграрный университет)

Научный редактор — канд. техн. наук, доц. *Н. В. Семёнова*

Кириллова, Т. И.

К43 Инженерная графика. Относительное положение плоскости и поверхности, поверхностей : учебное пособие / Т. И. Кириллова, Л. В. Соловьёва-Гоголева, Л. Ю. Стриганова. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 100 с.
ISBN 978-5-7996-2257-2

Учебное пособие по дисциплине «Инженерная графика» можно использовать в преподавании дисциплин, имеющих раздел «Начертательная геометрия». В пособии рассматривается теоретический материал по темам: сечение поверхностей плоскостью, построение линий пересечения поверхностей и построение разверток поверхностей. Пособие содержит наглядный иллюстративный материал с 3D-моделями рассматриваемых примеров, что способствует лучшему усвоению изучаемого материала и облегчает выполнение предлагаемых индивидуальных заданий. В пособие включены задачи для подготовки к текущему контролю знаний по дисциплине «Инженерная графика» (раздел «Начертательная геометрия»).

Библиогр.: 10 назв. Рис. 81. Табл. 8.

УДК 744(075.8)
ББК 30.11я73-5

Учебное издание

Кириллова Татьяна Ивановна, **Стриганова** Лариса Юрьевна,
Соловьёва-Гоголева Лариса Викторовна

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ПОВЕРХНОСТИ, ПОВЕРХНОСТЕЙ

Подписано в печать 30.10.2017. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.
Цифровая печать. Усл. печ. л. 11,6. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 50 экз. Заказ 312.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
<http://print.urfu.ru>

ISBN 978-5-7996-2257-2

©Уральский федеральный университет, 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Инженерная графика» является фундаментальной дисциплиной общеинженерного цикла при подготовке квалифицированного бакалавра и специалиста в области строительства. В дисциплину входят несколько разделов, которые изучаются на протяжении первого года обучения в вузе. Разделы инженерной графики представлены в виде схемы (рис. 1).

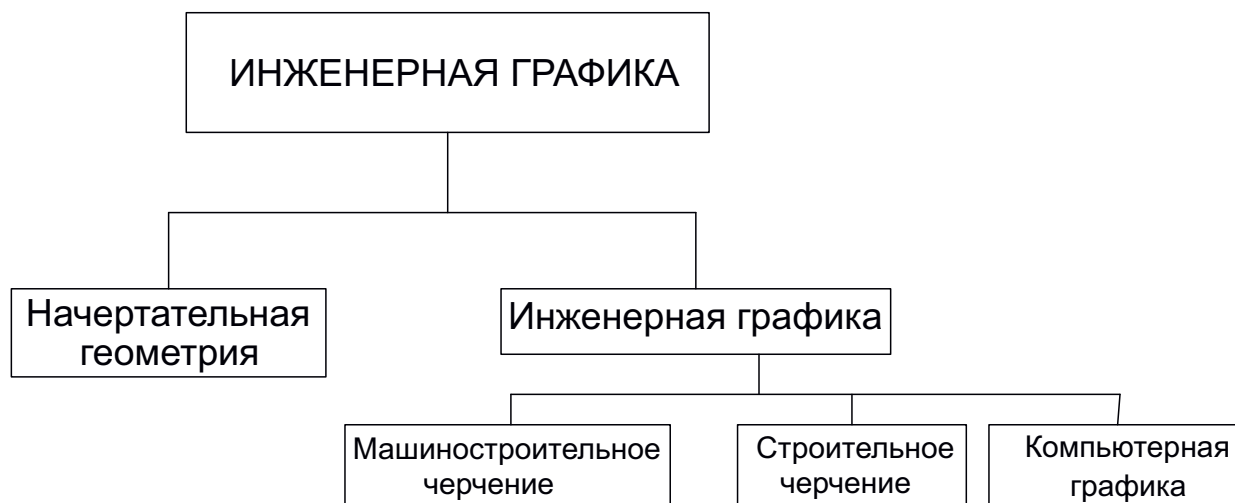


Рис. 1. Разделы дисциплины «Инженерная графика»

Данное пособие предназначено для освоения первого раздела дисциплины — «Начертательная геометрия». Начертательная геометрия является теоретической основой курса «Инженерная графика». Она изучает методы изображения пространственных объектов на плоскости проекций и алгоритмы решения позиционных, метрических и конструктивных задач.

- ♦ **Позиционные** — задачи на относительное положение геометрических объектов.
- ♦ **Метрические** — задачи на определение расстояния и натуральных величин геометрических объектов.
- ♦ **Конструктивные** — задачи на построение геометрических фигур, отвечающих заданным условиям.

Данное пособие помогает освоить:

- ♦ основные законы формирования, построения и взаимного пересечения моделей плоскости и пространства, необходимые для выполнения и чтения чертежей зданий, сооружений, конструкций;

- ◇ графические способы решения метрических, позиционных и конструктивных задач пространственных объектов на чертежах;
- ◇ методы проецирования и изображения пространственных форм на плоскости проекции.

В приложениях пособия приведены три типа расчетно-графических работ для самоконтроля знаний:

- ◇ Относительное положение поверхности и плоскости.
- ◇ Относительное положение поверхностей. Способ вспомогательных секущих плоскостей.
- ◇ Относительное положение поверхностей. Способ вспомогательных концентрических сфер. Развертка поверхности.

Выполняя практическую работу, на различных стадиях проектирования, от эскиза, технического рисунка до проектно-конструкторской документации, студент, а в дальнейшем специалист обращается к изображению различных поверхностей. Знание теоретических основ построения поверхностей позволяет грамотно создавать проектно-конструкторскую документацию, на основании которой выполняется изделие в материале. Кроме того, без знания теоретических основ построения линии пересечения поверхностей невозможно точно и грамотно выполнить проект в натуральную величину.

Данное пособие позволяет освоить теоретические основы начертательной геометрии и знакомит студентов первого курса с правилами оформления чертежей.

1. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ПЛОСКОСТИ

Познакомимся с основными определениями, которые мы будем использовать при изучении относительного положения поверхности и плоскости, поверхностей.

Плоскость — это множество положений прямой линии (l), проходящей через одну точку пространства (A) и пересекающей вне ее прямую линию (a) (рис. 2).

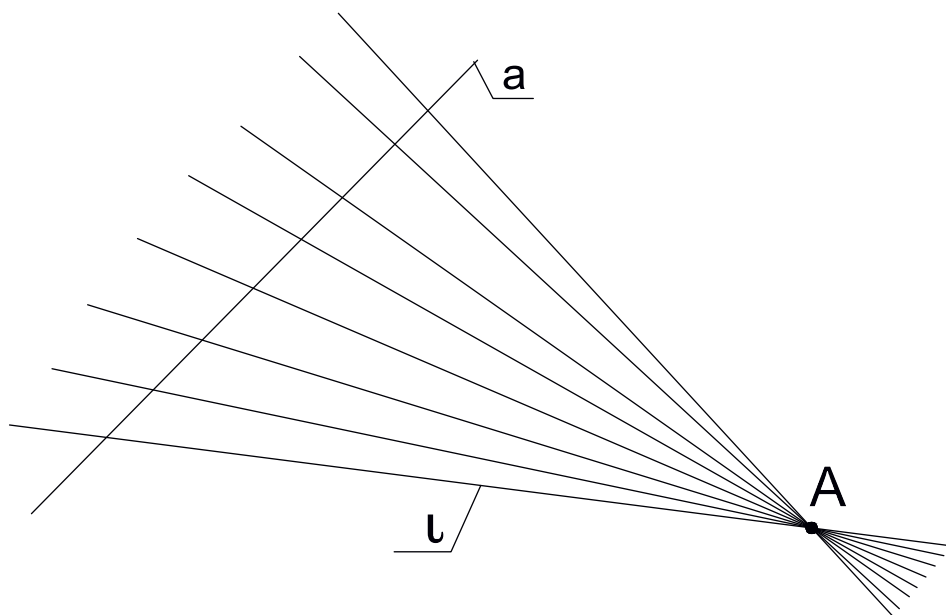


Рис. 2. Плоскость

Поверхность образуется в результате перемещения в пространстве некоторой линии постоянной или переменной формы (рис. 3). Линия, перемещающаяся в пространстве, называется **образующей**. Линия, по которой происходит перемещение образующей, называется **направляющей**.

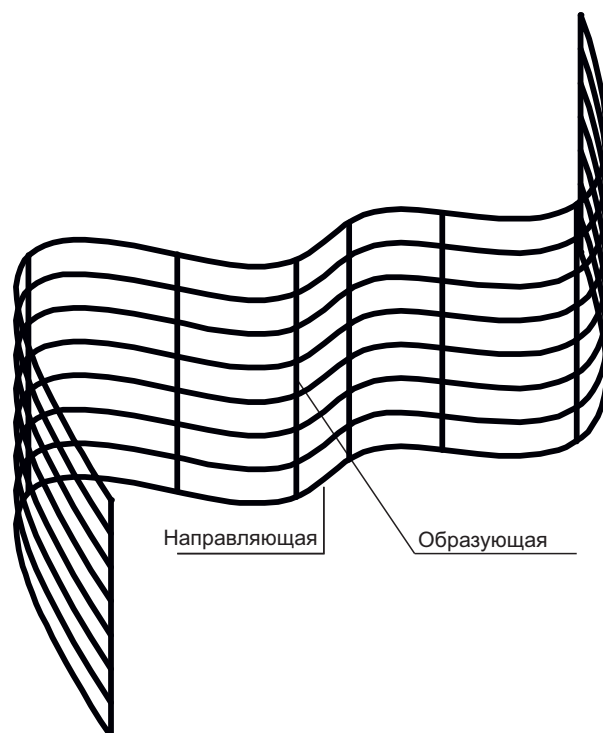


Рис. 3. Поверхность

Поверхности вращения можно выделить в отдельную группу поверхностей, так как направляющей у таких поверхностей является ось вращения, а образующая может иметь форму как прямой, так и кривой линии, например окружности.

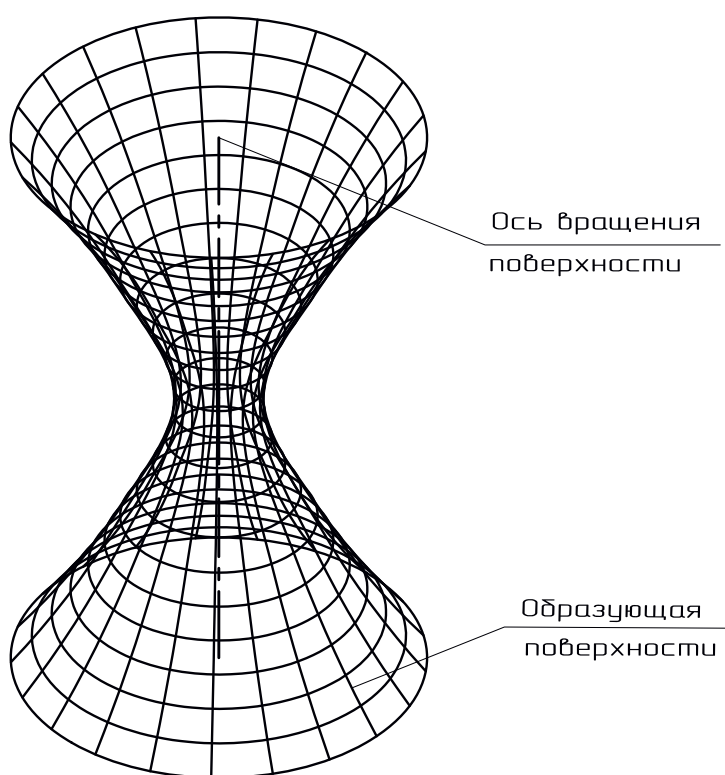


Рис. 4. Поверхность вращения

1.1. Простейшие поверхности вращения

Поверхность может быть задана очерком и определителем.

Очерк поверхности — это границы проекций поверхностей.

Определитель поверхности — совокупность геометрических элементов, задающих поверхность и алгоритм движения (в нашем случае вращения) образующей вокруг направляющей. Назовем геометрические элементы, задающие простейшие поверхности вращения, представленные в табл. 1:

i — ось вращения поверхности;

L — прямолинейная образующая поверхности;

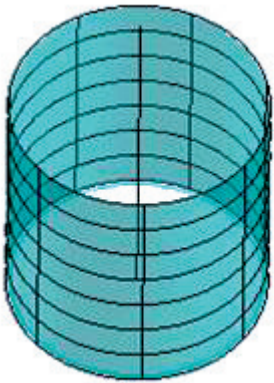
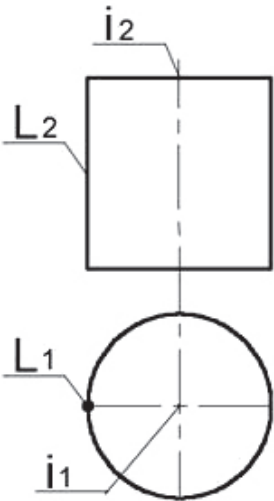
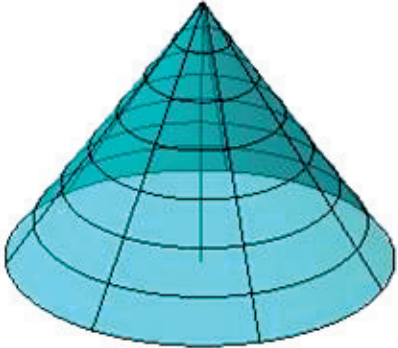
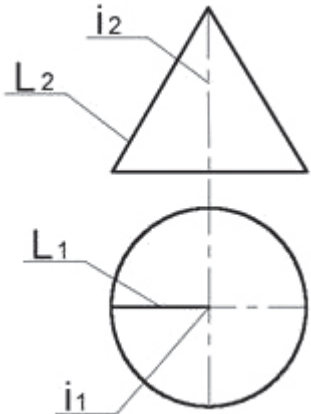
m — криволинейная образующая поверхности;

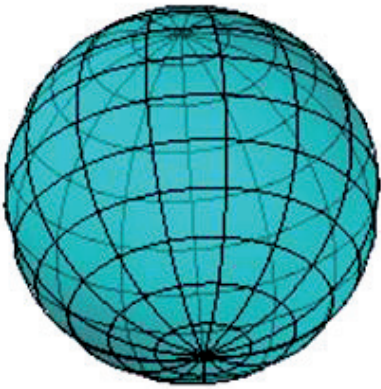
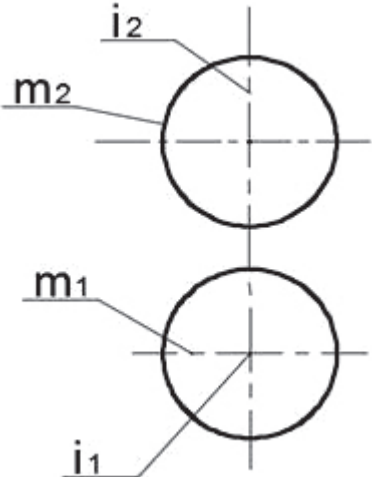

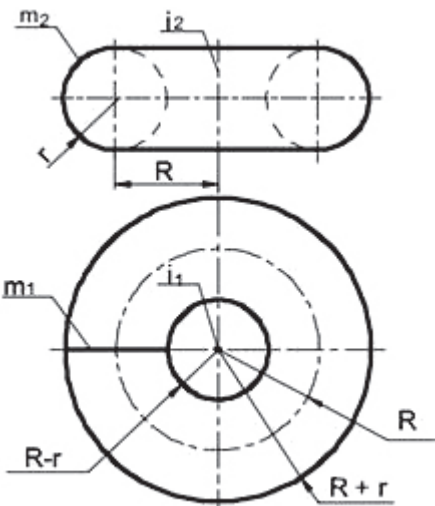
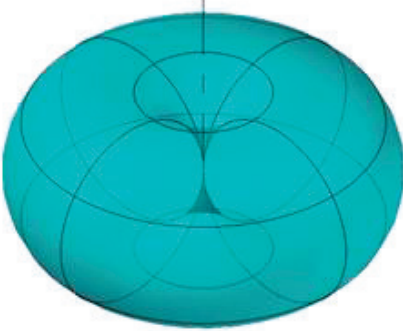
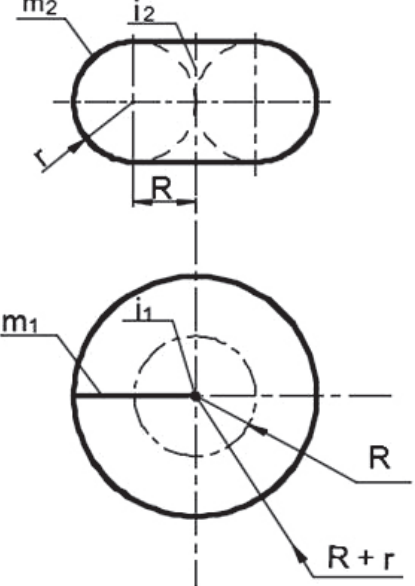
R — радиус вращения поверхности;

r — радиус образующей окружности.


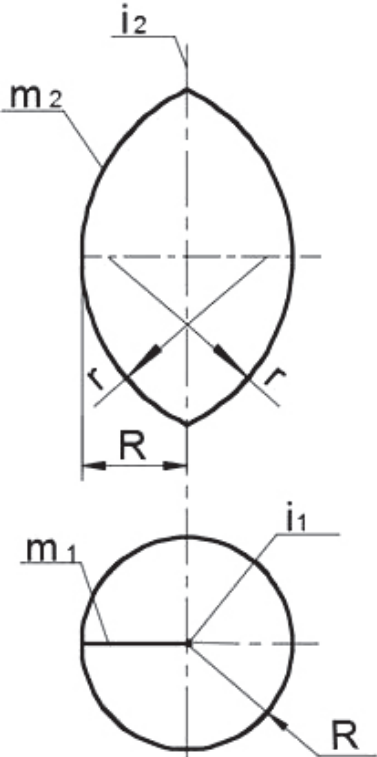

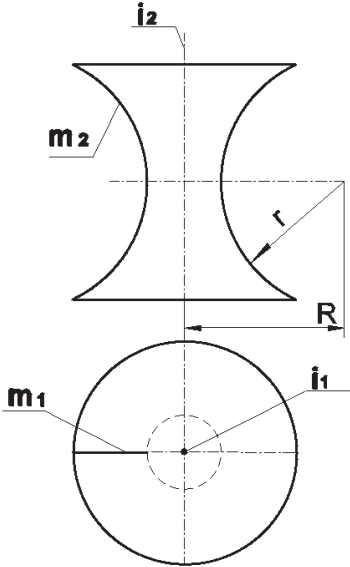
Таблица 1

Простейшие поверхности вращения

Наименование поверхности	3D-модель поверхностей	Ортогональные проекции поверхности
1	2	3
Цилиндр прямой круговой		
Конус прямой круговой		

1	2	3
Сфера		
Тор открытый, $R > r$		
Тор закрытый, $R = r$		

Окончание табл. 1

1	2	3
<p>Тор само- пересе- каю- щийся, $R < r$</p>		
<p>Глобоид, $R > r$</p>		

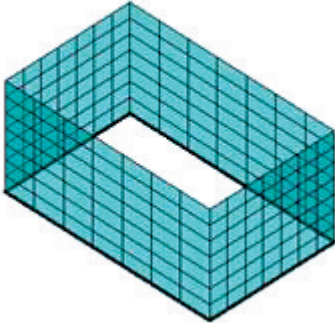
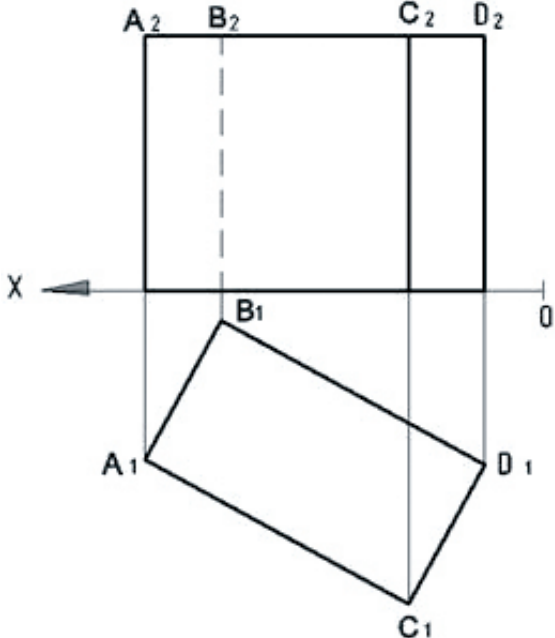
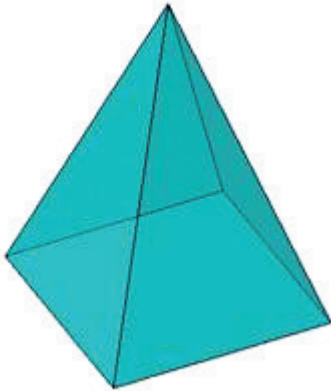
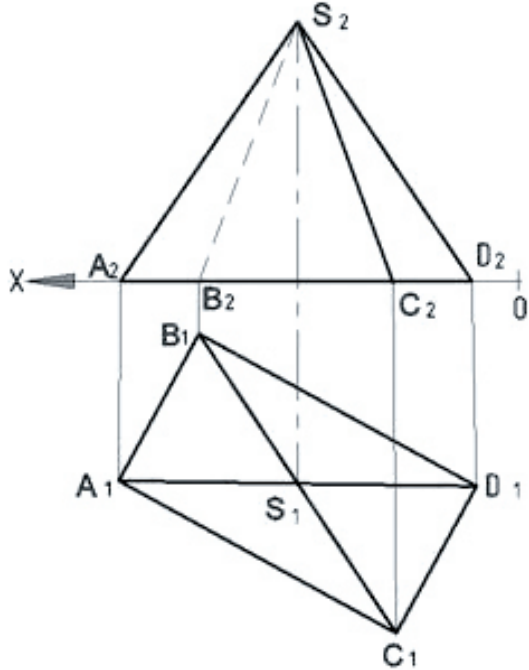
1.2. Простейшие гранные поверхности

Гранные поверхности, такие как призма и пирамида, формируются при перемещении прямолинейной образующей по ломаной направляющей. Прямая призма имеет все образующие параллельные друг другу и перпендикулярные направляющей. Все образующие прямой пирамиды проходят через одну точку S , не принадлежащую направляющей, которую называют вершиной пирамиды.

Ортогональные проекции прямой призмы и прямой пирамиды представлены в таблице 2.

Таблица 2

Простейшие гранные поверхности

Наименование поверхности	3D-модель поверхностей	Ортогональные проекции поверхности
Призма прямая		
Пирамида прямая		

1.3. Сечения поверхностей плоскостью

Сечение поверхности плоскостью — это плоская фигура, которая получается при пересечении поверхности плоскостью, или совокупность точек, одновременно принадлежащих поверхности и плоскости.

Сечение многогранной поверхности плоскостью — это многоугольник, который строится по точкам пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника.

Построение сечения поверхности трехгранной прямой пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью α показано на рис. 5. Все точки сечения пирамиды на фронтальной плоскости проекций определяются на пересечении ребер и секущей плоскости. Горизонтальные проекции точек сечения определяем на линиях связи и на горизонтальных проекциях ребер.

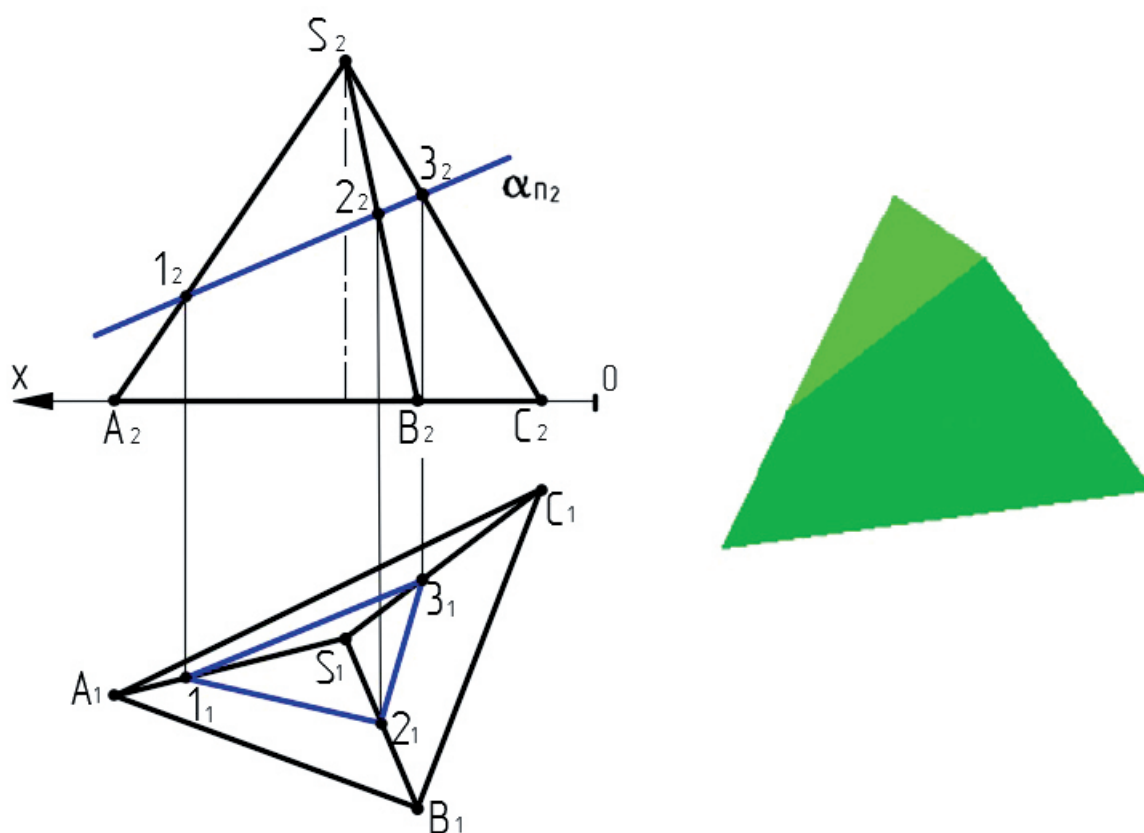


Рис. 5. Сечение поверхности трехгранной пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью α

Построение сечения поверхности четырехгранной прямой призмы фронтально-проецирующей плоскостью α показано на рис. 6. Фронтальные проекции точек определяются на пересечении фронтальных проекций ребер и секущей плоскости. Горизонтальные проекции точек сечения совпадают с горизонтальными проекциями ребер призмы, так как все ребра прямой призмы являются горизонтально проецирующими прямыми.

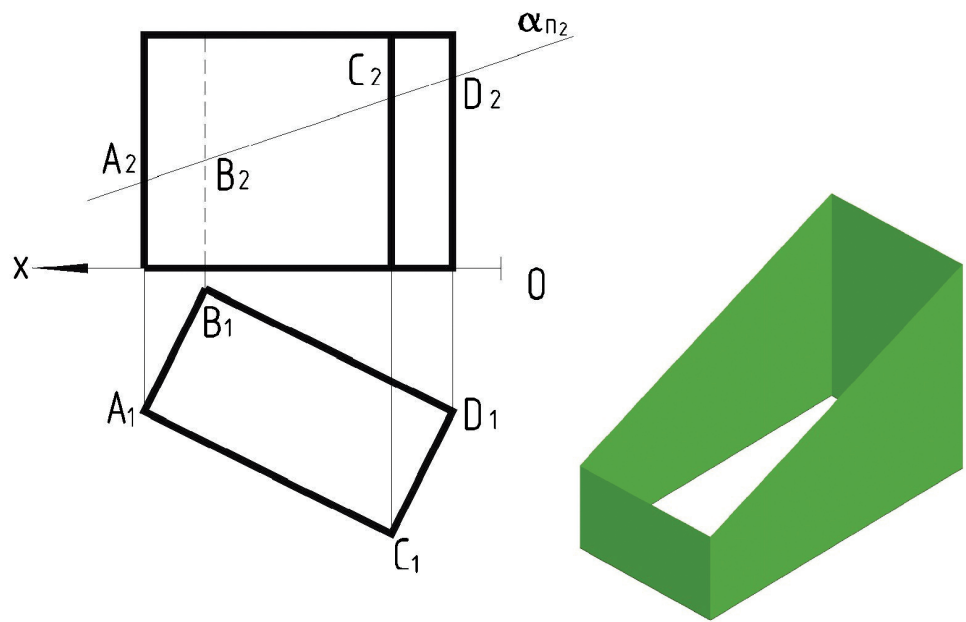


Рис. 6. Сечение прямой призмы фронтально-проецирующей плоскостью α

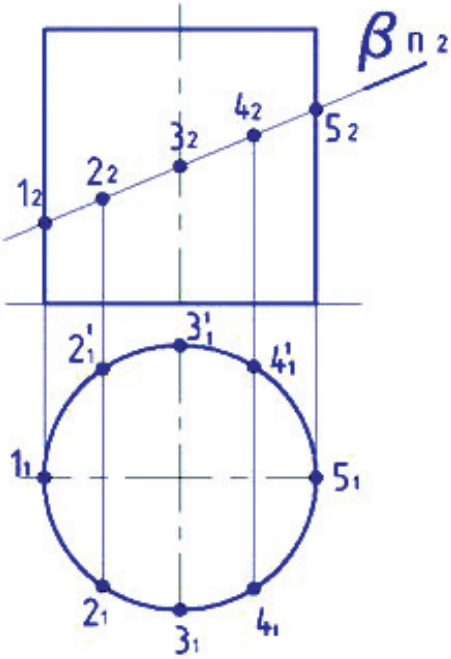
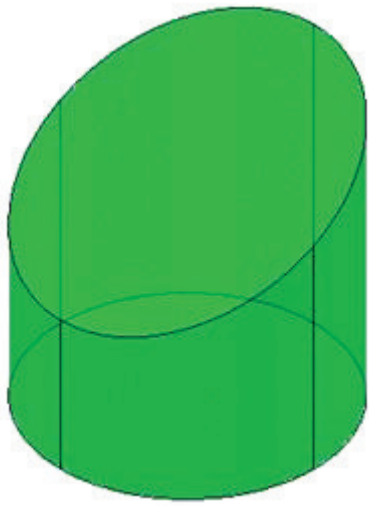
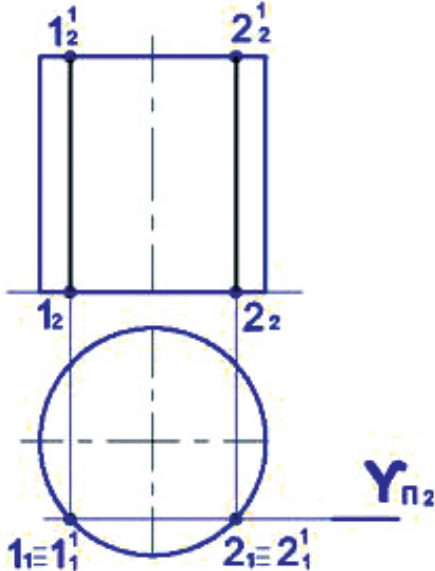

Сечения цилиндрической поверхности вращения плоскостью — это плоские геометрические фигуры: окружность, эллипс или прямоугольник. Форма сечения поверхности цилиндра вращения зависит от расположения в пространстве секущей плоскости. Чертежи сечений поверхности прямого кругового цилиндра различными секущими плоскостями приведены в табл. 3.

Таблица 3

Сечения поверхности прямого кругового цилиндра

Вид сечения и направление секущей плоскости	Ортогональные проекции сечений поверхности прямого кругового цилиндра	3D-модели сечений поверхности кругового цилиндра
1	2	3
Окружность. Плоскость α перпендикулярна оси вращения цилиндра		

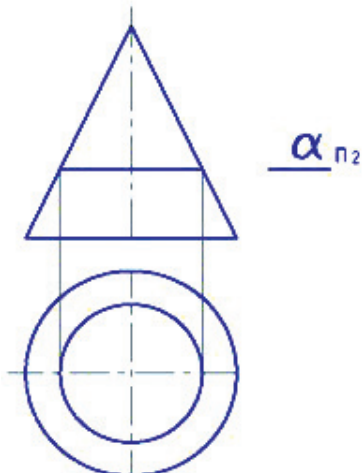

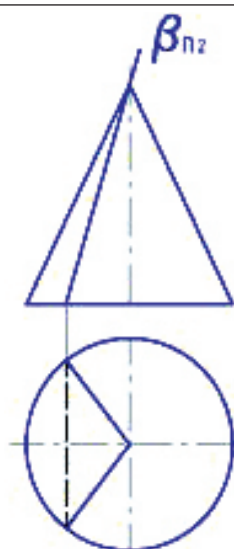

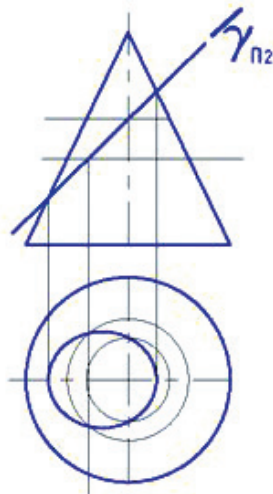

Окончание табл. 3

1	2	3
<p>Эллипс. Плоскость β наклонена к оси вращения цилиндра под произвольным углом</p>		
<p>Прямоугольник. Плоскость γ параллельна оси вращения цилиндра</p>		

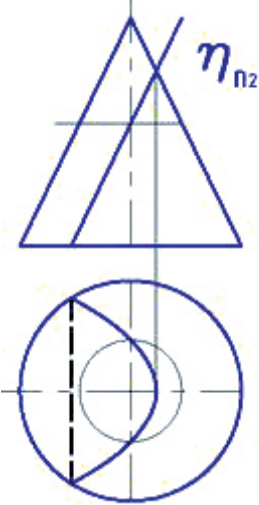

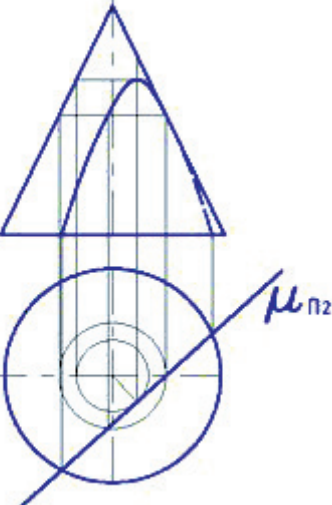

Сечения конической поверхности вращения плоскостью — это плоские фигуры: окружность, треугольник, эллипс, парабола и гипербола. Форма сечения поверхности конуса вращения зависит от расположения секущей плоскости. Чертежи сечений поверхности вращения прямого конуса показаны в табл. 4.

Таблица 4

Сечения поверхности прямого конуса вращения

Вид сечения и направление секущей плоскости	Ортогональные проекции сечения поверхности прямого конуса	3D-модель сечения поверхности кругового конуса
1	2	3
<p>Окружность. Плоскость α перпендикулярна оси вращения конуса</p>		
<p>Треугольник. Плоскость β проходит через вершину конуса</p>		
<p>Эллипс. Плоскость наклонена к оси вращения под произвольным углом</p>		

Окончание табл. 4

1	2	3
<p>Парабола. Плоскость η параллельна образующей конуса</p>		
<p>Гипербола. Плоскость μ параллельна оси вращения конуса</p>		

Сечение сферической поверхности плоскостью — это окружность, которая может проецироваться в окружность, эллипс или прямую линию, в зависимости от расположения секущей плоскости относительно плоскостей проекций. На рис. 7 часть сечения выполнена плоскостью β , параллельной горизонтальной плоскости проекций.

Это сечение на горизонтальную плоскость проекций проецируется в виде части окружности радиусом R_3 , который определяется на фронтальной плоскости проекций расстоянием от вертикальной оси вращения сферы до очерка сферы по плоскости β .

Вторая секущая плоскость α наклонена к горизонтальной плоскости проекций под углом 45° . Сечение плоскостью α по сфере также имеет форму окружности, но это сечение проецируется на горизонтальную и профильную плоскость проекций как эллипс, а на фронтальную плоскость в виде прямой линии.

Для построения горизонтальных проекций точек 3, 4 и 5 через фронтальные проекции точек проводятся вспомогательные горизонтальные секущие плоскости β , μ и n , которые пересекают сферу по окружностям разных радиусов. Это R_3 — для точки 3, R_4 — для точки 4, R_5 — для точки 5 (рис. 7). Окружности указанного радиуса проецируются в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекций. Горизонтальные проекции точек

3, 4, 5 определяются как точки пересечения окружностей и вертикальных линий связи, проведенных из фронтальных проекций точек. Точка 2 принадлежит экватору сферы, он является очерком сферы на горизонтальной плоскости проекций.

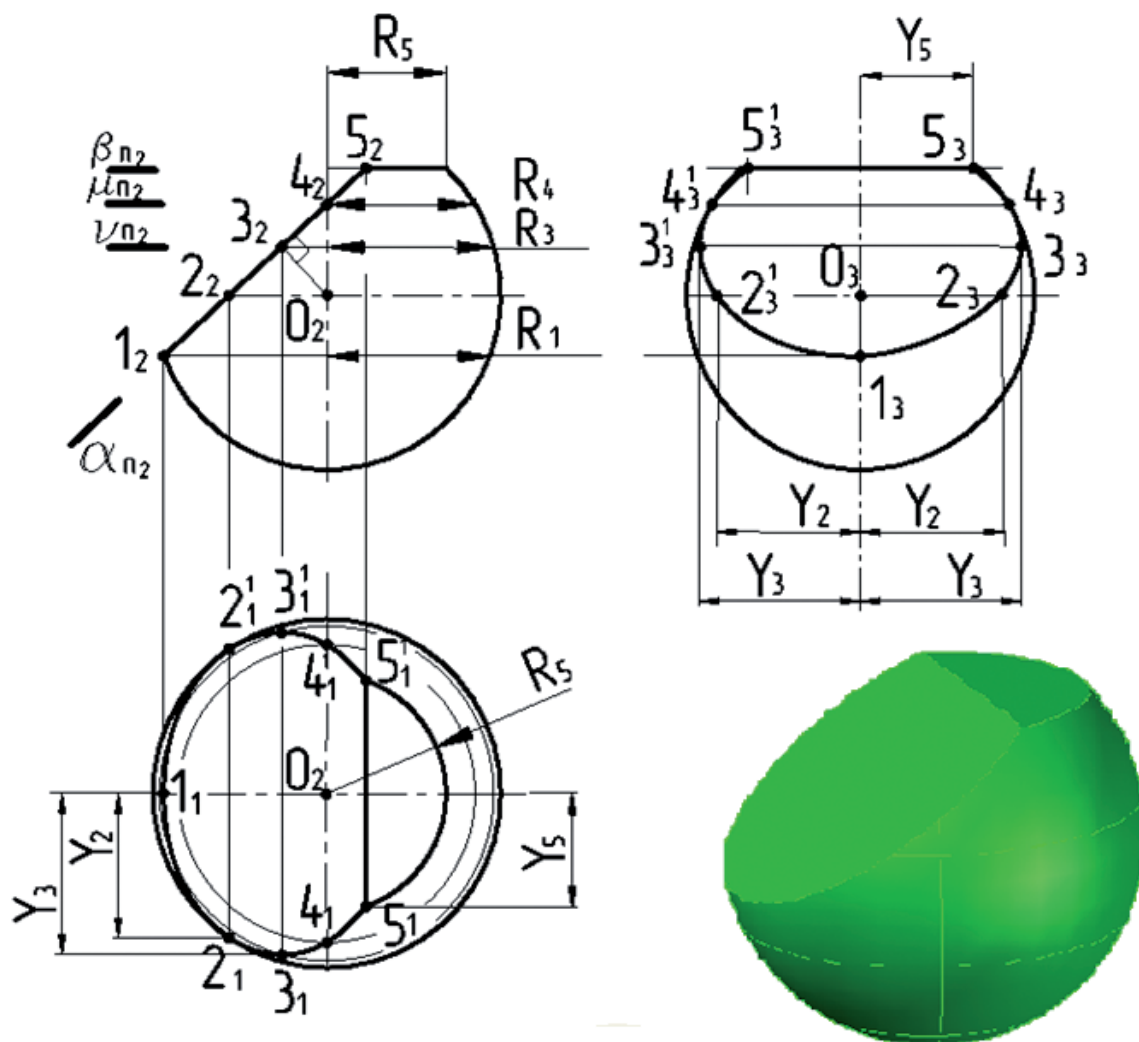


Рис. 7. Сечения поверхности сферы плоскостями:

α — фронтально-проецирующая плоскость; β, μ, n — горизонтальные плоскости уровня

Точка 1 принадлежит главному меридиану сферы, горизонтальная проекция главного меридиана совпадает с горизонтальной осью сферы. Горизонтальные проекции точки 1 и 2 определяются на пересечении горизонтальных проекций главного меридиана и экватора сферы и вертикальных линий связи, проведенных из фронтальных проекций указанных точек.

Построение профильных проекций точек сечения начинается с проведения горизонтальных линий связи от фронтальных проекций точек $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$. На горизонтальной плоскости проекций измеряется расстояние от горизонтальной оси сферы до горизонтальной проекции точки — Y_2, Y_3, Y_5 (это Y точки относительно горизонтальной оси симметрии сферы), и эти величины откладываются на профильной плоскости проекций на высоте расположения точки, влево и вправо от вертикальной оси симметрии сферы.

Профильная проекций точки 1_3 располагается на вертикальной оси сферы, профильные проекции точек 4_3 и 4_3^I принадлежат очерку сферы.

Сечения торовых поверхностей

Торовые поверхности формируются при вращательном движении дуги окружности вокруг оси. Виды торовых поверхностей представлены в табл. 1. Познакомимся с сечениями по поверхности тора, которые необходимо построить в индивидуальных заданиях расчетно-графической работы (см. приложения 1, 2 и 3).

Сечение поверхности тора-кольца плоскостью перпендикулярной оси вращения тора представляет собой кольцо. На рис. 8 представлена поверхность тора-кольца, у которого ось вращения перпендикулярна фронтальной плоскости проекций. Секущая плоскости α является фронтальной плоскостью уровня. Горизонтальная проекция сечения совпадает с проекцией плоскости α_{n1} .

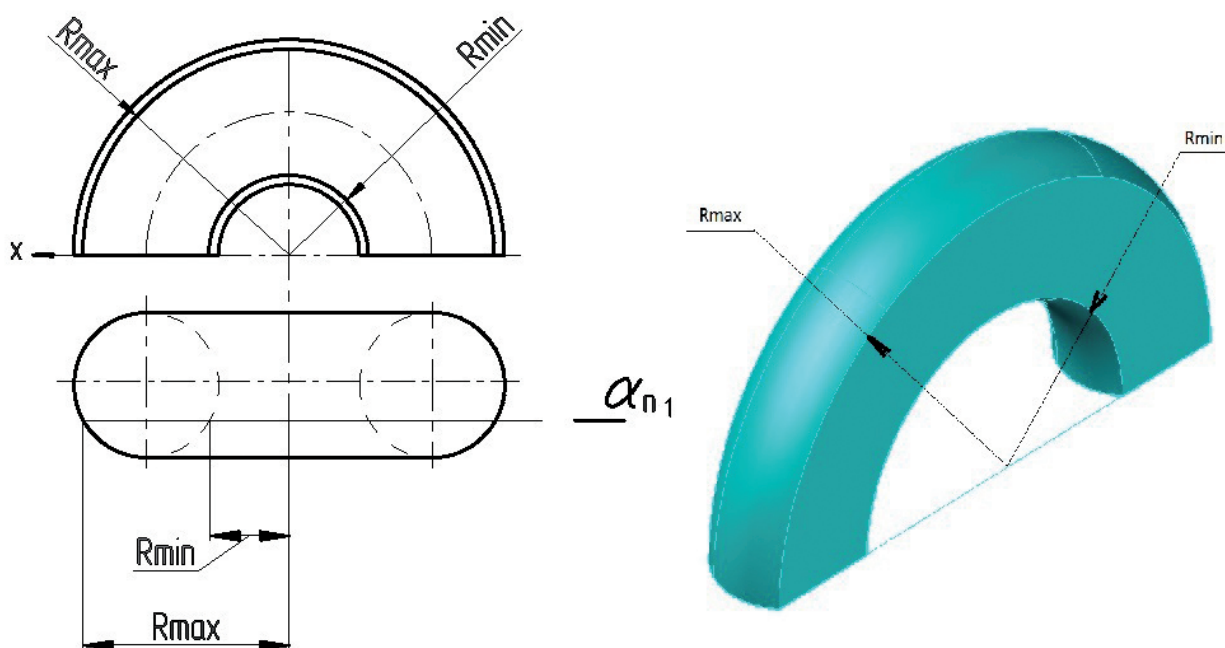


Рис. 8. Сечение тора-кольца плоскостью α , перпендикулярной оси вращения тора

Для построения фронтальной проекции сечения нужно определить максимальный (R_{max}) и минимальный (R_{min}) радиусы окружностей сечения-кольца. Максимальный радиус R_{max} сечения-кольца определяется расстоянием от оси вращения поверхности тора до наружного очерка поверхности (рис. 8). Минимальный радиус R_{min} сечения-кольца определяется расстоянием от оси вращения поверхности тора до очерка внутренней полости поверхности тора.

Сечение поверхности тора самопересекающегося плоскостью перпендикулярной оси вращения поверхности имеет форму окружности. Радиус окружности сечения определяется расстоянием от оси вращения поверхности до очерка поверхности по секущей плоскости. На рис. 9 представлены поверхность тора самопересекающегося и две секущие горизонтальные плоскости уровней α и β , которые перпендикулярны оси вращения тора.

Сечение плоскостью α — окружность, радиус которой R_α (рис. 9). Сечение плоскостью β — это окружность радиусом R_β (рис. 9).

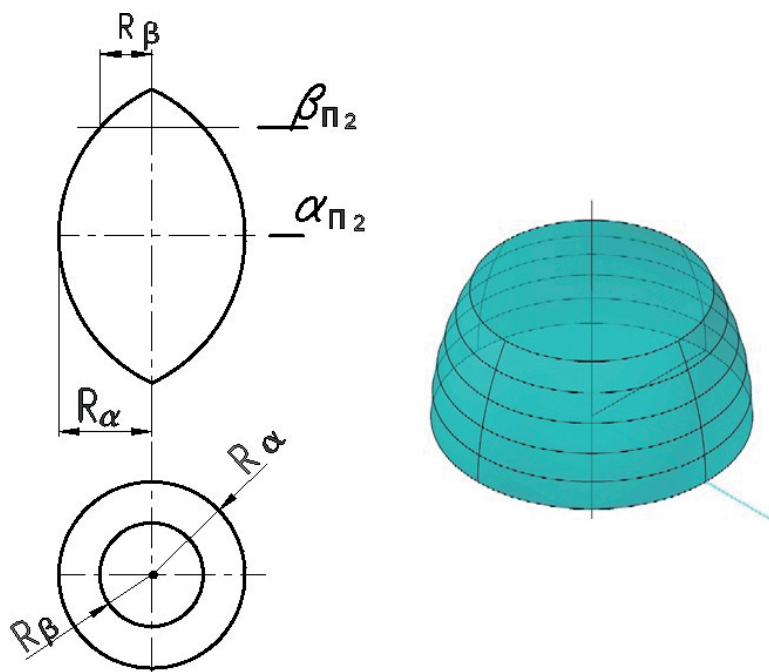


Рис. 9. Сечения тора самопересекающегося плоскостями α и β , перпендикулярными оси вращения поверхности

В индивидуальных заданиях для самоконтроля знаний (см. приложения) студентам необходимо построить сечение комбинированной поверхности (состоящей из нескольких поверхностей).

Пример 1. Построение сечения комбинированной поверхности, состоящей из четырехгранной призмы и полусферы, фронтально-проецирующей плоскостью α и натуральной величины сечения (рис. 10).

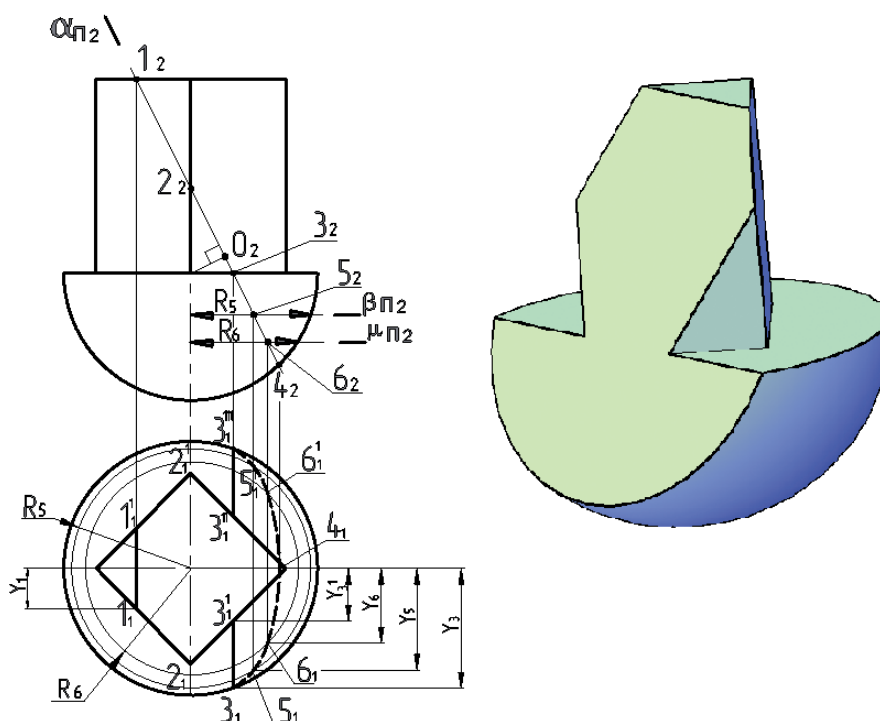


Рис. 10. Построение фронтальной и горизонтальной проекции сечения комбинированной поверхности плоскостью α

1) Анализ заданных поверхностей, секущей плоскости и линий сечения заданной комбинированной поверхности.

Поверхность призмы в представленном примере является горизонтально-проецирующей, так как все ее образующие перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций, поэтому поверхность призмы и линия сечения на горизонтальной плоскости проекций совпадают с очерком призмы. Линия сечения призмы плоскостью α представляет собой ломаную линию, и для ее построения достаточно определить точки на верхнем и нижнем основании призмы и точки пересечения секущей плоскости с ребрами призмы — это точки 1, 3 и 2.

Сфера — поверхность вращения с образующей окружностью. Сечение полусферы плоскостью α — это окружность, которая проецируется на горизонтальную и профильную плоскости проекций в виде эллипса.

Секущая плоскость α является фронтально-проецирующей, поэтому на фронтальной плоскости проекций все точки сечения принадлежат следу плоскости $\alpha_{п2}$. На фронтальной плоскости проекций на чертеже обозначены только видимые точки линии сечения.

2) Определение характерных и промежуточных точек линии сечения заданной комбинированной поверхности.

Сначала определяются характерные точки линии сечения комбинированной поверхности на фронтальной плоскости проекций.

Характерными точками сечения призмы плоскостью α являются точки 1, 3 и 2. Горизонтальные проекции точек 1, 1¹ и 3¹, 3¹¹ определяются на пересечении горизонтальной проекции верхнего и нижнего основания призмы и вертикальной линии связи, проведенной из фронтальных проекций точек. Горизонтальная проекция точек 2 и 2¹ лежит на горизонтальных проекциях ребер призмы. На фронтальной проекции обозначены только видимые точки.

Характерными точками сечения полусферы плоскостью α являются:

- ♦ точки 3 и 3¹¹¹ — принадлежащие экватору полусферы;
- ♦ точка 4 — принадлежащая главному меридиану полусферы;
- ♦ точка 0 — являющаяся центром окружности-сечения сферы плоскостью α .

Для определения величины радиуса окружности-сечения сферы плоскостью α на фронтальной плоскости проекции из центра сферы проводим перпендикуляр на секущую плоскость α . Натуральная величина радиуса окружности-сечения равна расстоянию 0,4₂ (рис. 10).

Горизонтальные проекции точек 3₁ и 3₁¹¹¹ определяются на пересечении горизонтальной проекции экватора сферы и вертикальной линии связи, проведенной из фронтальной проекции точек.

Горизонтальную проекцию точки 4₁ определяют на пересечении горизонтальной проекции главного меридиана сферы и вертикальной линии связи, проведенной из фронтальной проекции точки.

Горизонтальную проекцию точки 0 определять не нужно, так как она располагается за пределами полусферы.

На горизонтальную плоскость проекций сечение сферы проецируется в виде эллипса, и для его построения необходимы промежуточные точки 5 и 6. Для построения горизонтальных проекций точек 5₁, 5₁¹ и 6₁, 6₁¹ необходимо провести дополнительные секущие горизонтальные плоскости уровня β и μ . Плоскости β и μ пересекают полусферу по окружностям радиуса R_5 и R_6 , окружности указанного радиуса проецируются в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекций. Горизонтальные проекции точек 5₁ и 5₁¹,

6_1 и 6_1^1 определяются на пересечении построенных сечений-окружностей и вертикальных линий связи, проведенных из фронтальных проекций точек.

3) Построение профильной проекции линии сечения поверхностей плоскостью α .

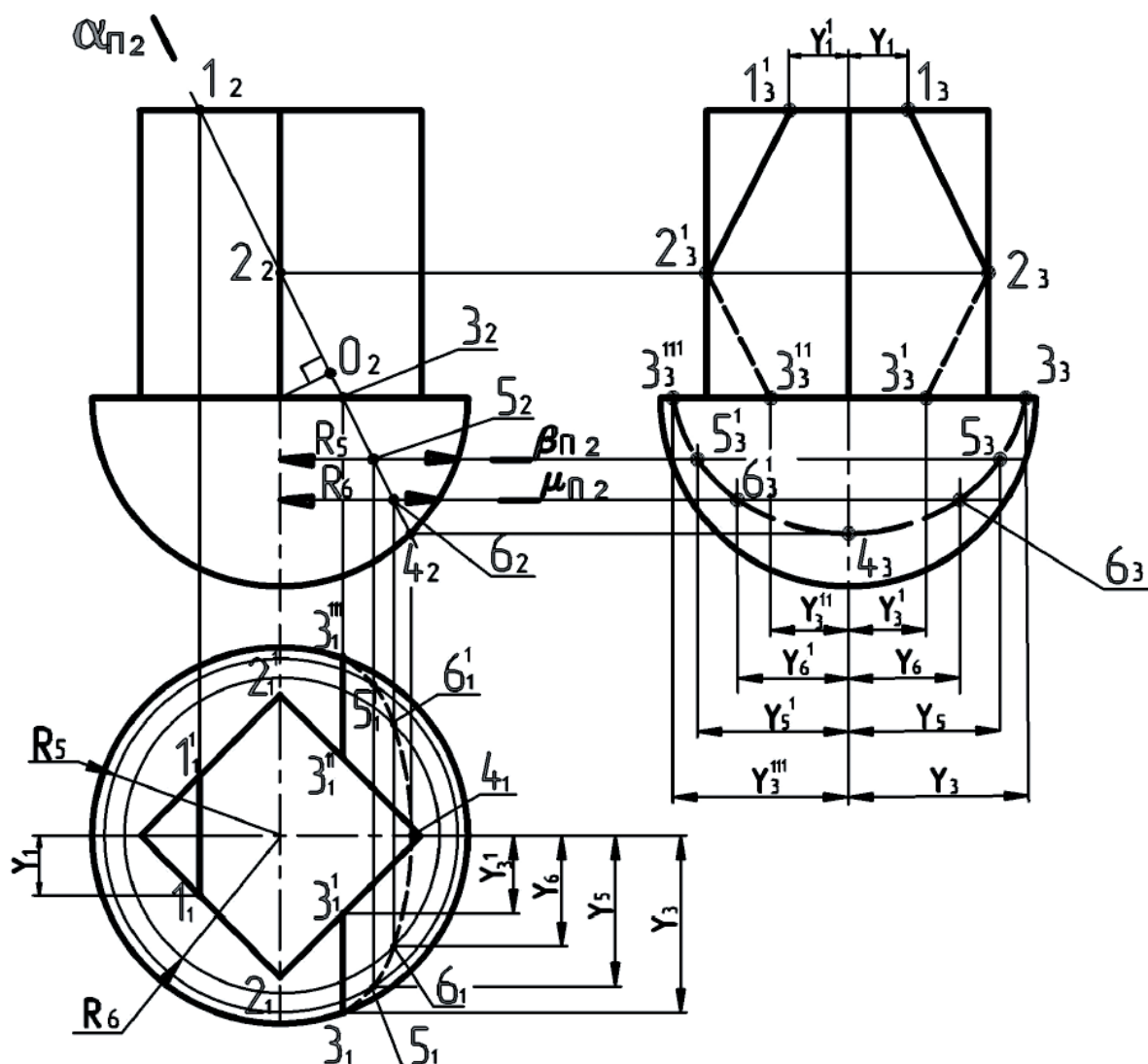


Рис. 11. Построение профильной проекции линии сечения комбинированной поверхности плоскостью α

Профильные проекции точек 2_3 и 2_3^1 принадлежат очерковым для плоскости P_3 ребрам призмы. Для построения профильных точек 1_3 , 1_3^1 и 3_1 , 3_1^1 нужно определить расстояние от горизонтальной оси симметрии комбинированной поверхности до горизонтальных проекций указанных точек. Это координаты Y_1 и Y_3^1 точек относительно горизонтальной оси симметрии поверхности. Для построения профильных проекций точек 1 и 3^1 откладывается измеренное расстояние Y_1 и Y_3^1 от вертикальной оси симметрии поверхности влево и вправо на верхнем и нижнем основании призмы (рис. 11).

Профильная проекция точки 4_3 располагается на вертикальной оси сферы и горизонтальной линии связи, проведенной из фронтальной проекции точки.

Профильные проекции точек 3_3 , 3_3^{111} , 5_3 , 5_3^1 , 6_3 , 6_3^1 можно определить, откладывая расстояния Y_3 , Y_5 , Y_6 на горизонтальных линиях связи, проведенных из фрон-

тальных проекций точек, аналогично построению профильных проекций точек 1 и 3 (рис. 11).

4) *Определение видимости линии сечения.*

На горизонтальной плоскости проекций невидима часть линии сечения, расположенная на нижней части полусферы.

На профильной плоскости проекций видима только часть сечения $1_3-1_3^1-2_3-2_3^1$.

5) *Построение натуральной величины сечения.*

Для построения натуральной величины сечения (рис. 12) используется способ преобразования — плоско-параллельное перемещение. Суть способа заключается в том, что заданный геометрический объект перемещается до положения, параллельного или перпендикулярного одной из плоскостей проекций.

В данном примере плоско-параллельно перемещается фронтальная проекция сечения $\alpha_{\Pi 2}$ ($1_2-2_2-0_2-3_2-5_2-6_2-4_2$) до положения, параллельного горизонтальной плоскости проекций ($1_2^1-2_2^1-0_2^1-3_2^1-5_2^1-6_2^1-4_2^1$). Расстояние между точками на следе $\alpha_{\Pi 2}$ не меняется при плоско-параллельном перемещении следа.

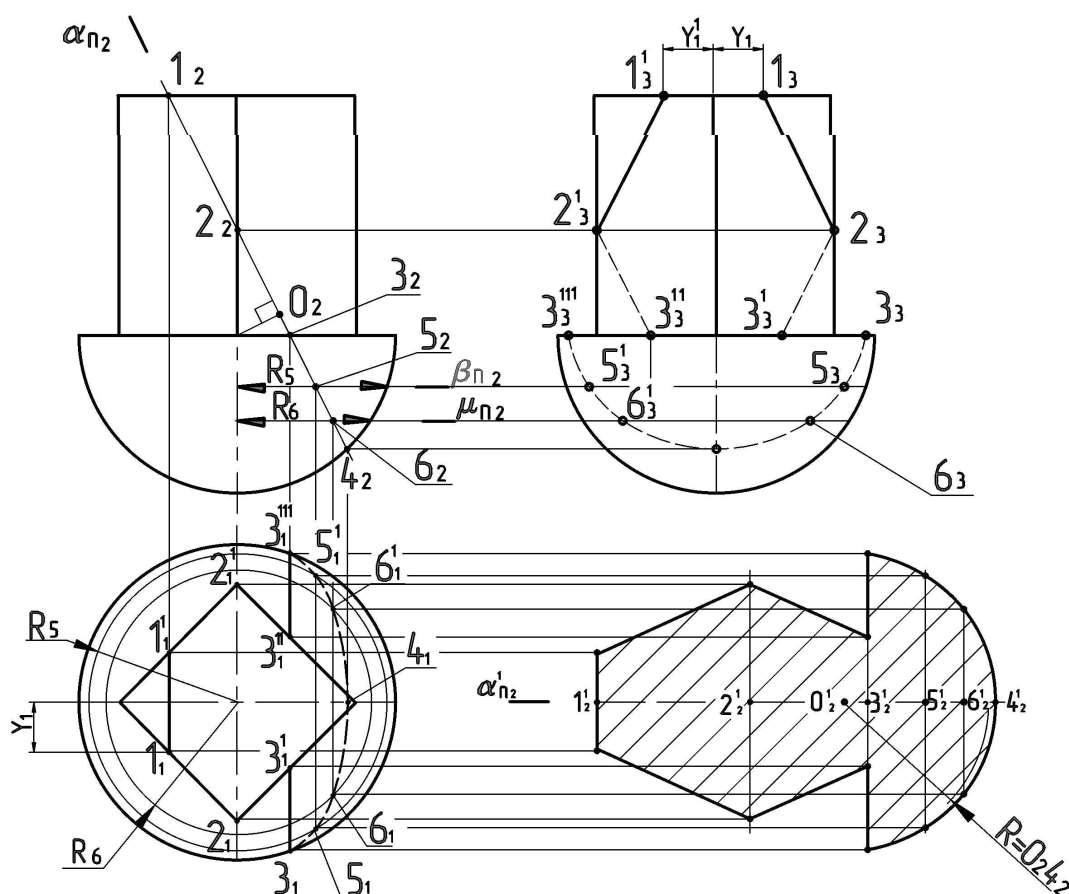


Рис. 12. Построение натуральной величины сечения

При плоско-параллельном перемещении фронтальной проекции следа $\alpha_{\Pi 2}$ величина координаты Y всех точек не меняется. Положение точек на натуральной величине сечения определяется на пересечении линий связи, проведенных из новых фронтальных проекций точек $1_2^1-2_2^1-0_2^1-3_2^1-5_2^1-6_2^1-4_2^1$ и из горизонтальных проекций точек $4_1, 6_1, 3_1, 3_1^1, 5_1, 2_1, 1_1$ и т.д.

Пример 2. Построение сечения комбинированной поверхности, состоящей из конуса и цилиндра вращения, фронтально-проецирующей плоскостью α и натуральной величины сечения (рис. 13).

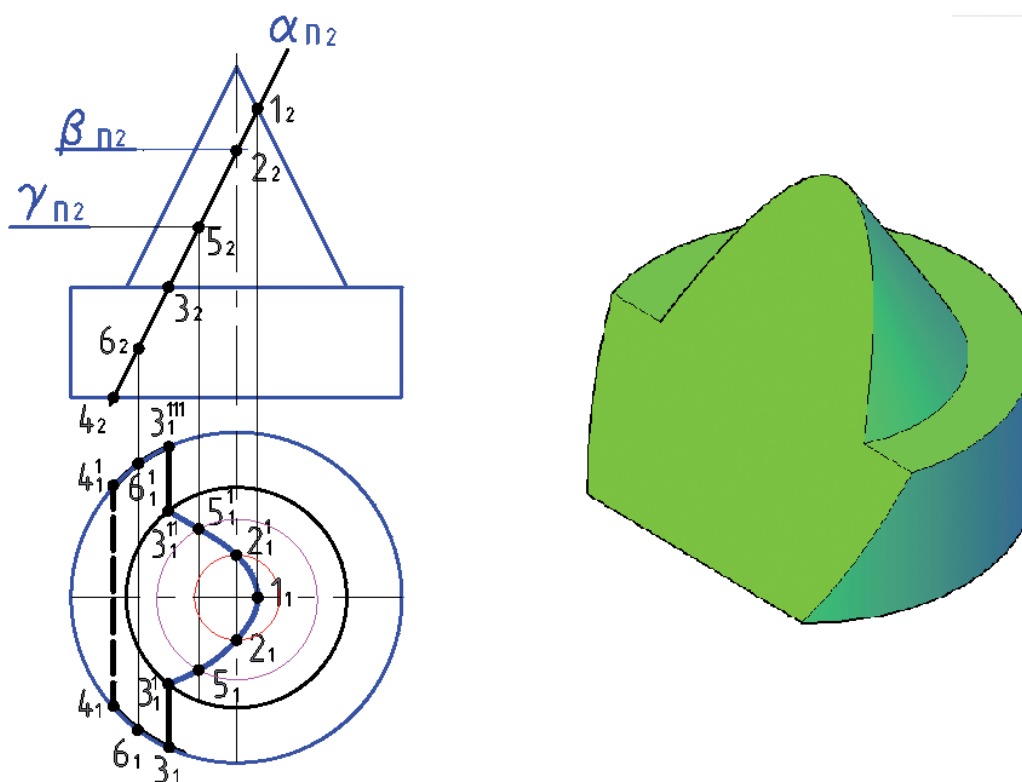


Рис. 13. Построение фронтальной и горизонтальной проекции сечения комбинированной поверхности плоскостью α

1) Анализ заданных поверхностей, секущей плоскости и линий сечения.

Комбинированная поверхность состоит из конуса вращения и цилиндра вращения, оси вращения которых перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций. Цилиндр в представленном примере является горизонтально-проецирующей поверхностью, так как все его образующие и ось вращения перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций, поэтому линия пересечения (сечения) цилиндра плоскостью α (3–6–4), имеющая форму части эллипса (см. табл. 3), на горизонтальной плоскости проекций совпадает с очерком цилиндра (горизонтальные проекции точек 4 и 4¹, 6 и 6¹, 3 и 3¹ располагаются на горизонтальной проекции цилиндра).

Линия пересечения (сечения) конуса плоскостью α (1–2–5–3) представляет собой часть параболы (см. табл. 4) с вершиной в точке 1 (секущая плоскость параллельна левой крайней образующей конуса).

Секущая плоскость α является фронтально-проецирующей, поэтому на фронтальной плоскости проекций все точки сечения принадлежат следу секущей плоскости $\alpha_{п2}$. На фронтальной плоскости проекций на чертеже обозначены только видимые точки.

2) Определение характерных и промежуточных точек линий сечения (рис. 13).

Сначала определяются характерные точки линии сечения конуса на фронтальной плоскости проекций. Характерными точками сечения конуса плоскостью α являются:

- ♦ точка 1 — принадлежащая правой крайней образующей конуса;

- ♦ точка 2 — принадлежащая очерку поверхности конуса на профильной плоскости проекций;
- ♦ точка 3 — принадлежащая основанию конуса.

Точка 5 — промежуточная точка, и ее положение выбрано произвольно на фронтальном следе плоскости α .

Горизонтальная проекция крайней правой образующей конуса совпадает с горизонтальной осью конуса. Поэтому для определения горизонтальной проекции точки 1_1 достаточно провести вертикальную линию связи от фронтальной проекции точки до пересечения с горизонтальной проекцией оси конуса.

Для определения горизонтальных проекций точек 2, 5 и 3, принадлежащих поверхности конуса, нужно через их фронтальные проекции провести вспомогательные горизонтальные секущие плоскости β и γ . Плоскости β и γ пересекают поверхность конуса по окружностям. Величина радиуса окружности определяется расстоянием от оси конуса до очерка конуса по секущей плоскости. Точка 3 принадлежит окружности, которая является основанием конуса, и ее проекция на горизонтальной плоскости построена. Горизонтальные проекции точек 3, 2 и 5 лежат на пересечении окружностей разного радиуса и вертикальной линии связи, проведенной от фронтальных проекций точек.

Характерными точками сечения цилиндра являются точки 3, 3^{III} и 4, 4^I , так как они принадлежат верхнему и нижнему основанию цилиндра.

3) Построение профильной проекции линии сечения комбинированной поверхности плоскостью α (рис. 14).

Профильная проекция точки 1 совпадает на профильной плоскости проекций с осью конуса, и для ее построения достаточно провести горизонтальную линию связи от ее фронтальной проекции до пересечения с осью вращения конуса.

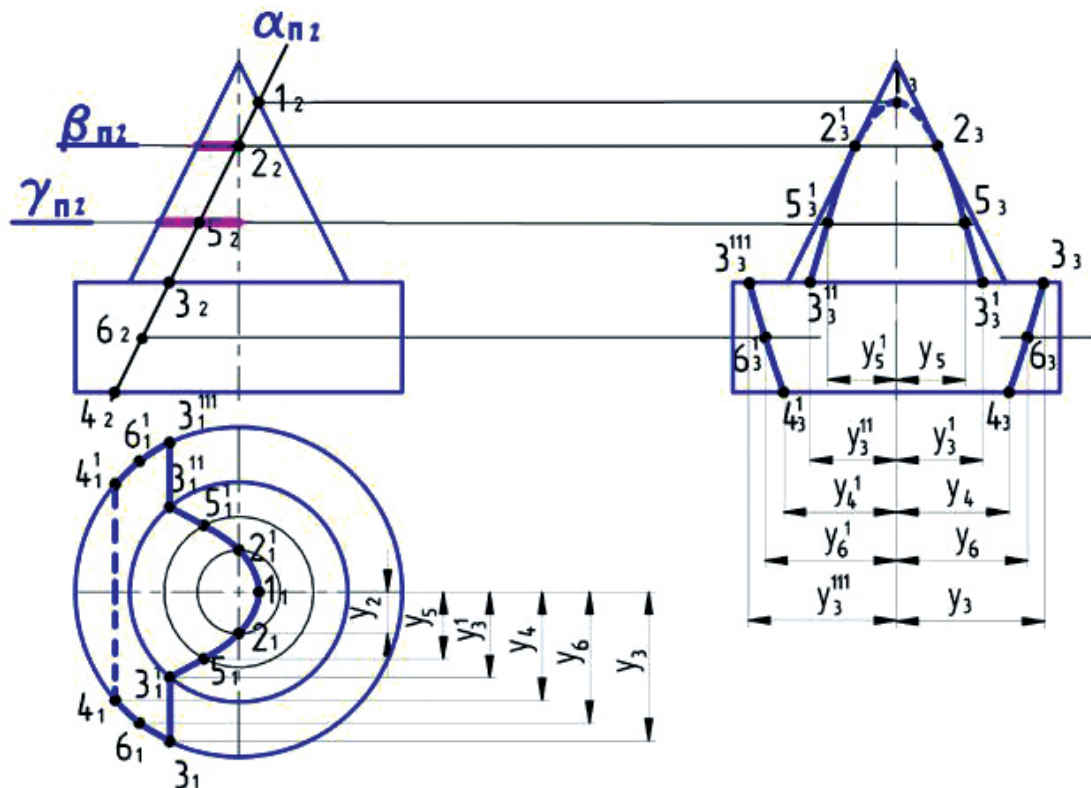


Рис. 14. Построение профильной проекции линии сечения комбинированной поверхности плоскостью α

Профильные проекции точек 2 и 2^1 принадлежат очерковым для профильной плоскости проекций, образующим конуса, и для их построения достаточно провести горизонтальную линию связи от их фронтальных проекций до пересечения с образующими конуса на профильной плоскости проекций.

Для построения профильных проекций точек 5 и 5^1 , 3 и 3^1 , 4 и 4^1 , 6 и 6^1 на горизонтальной проекции поверхностей измеряется расстояние от горизонтальной оси конуса или цилиндра до горизонтальной проекции точки — это координаты Y точек относительно оси симметрии конуса или цилиндра; это расстояние откладывается на профильной плоскости проекций, на высоте расположения точки, от вертикальной оси конуса или цилиндра вправо и влево, как показано на рис. 14.

4) *Определение видимости линии сечения.*

На горизонтальной плоскости проекций невидимой является только линия $4_1-4_1^1$. На профильной плоскости проекций часть линии сечения по поверхности конуса $2_3-1_3-2_3^1$ невидима (рис. 15).

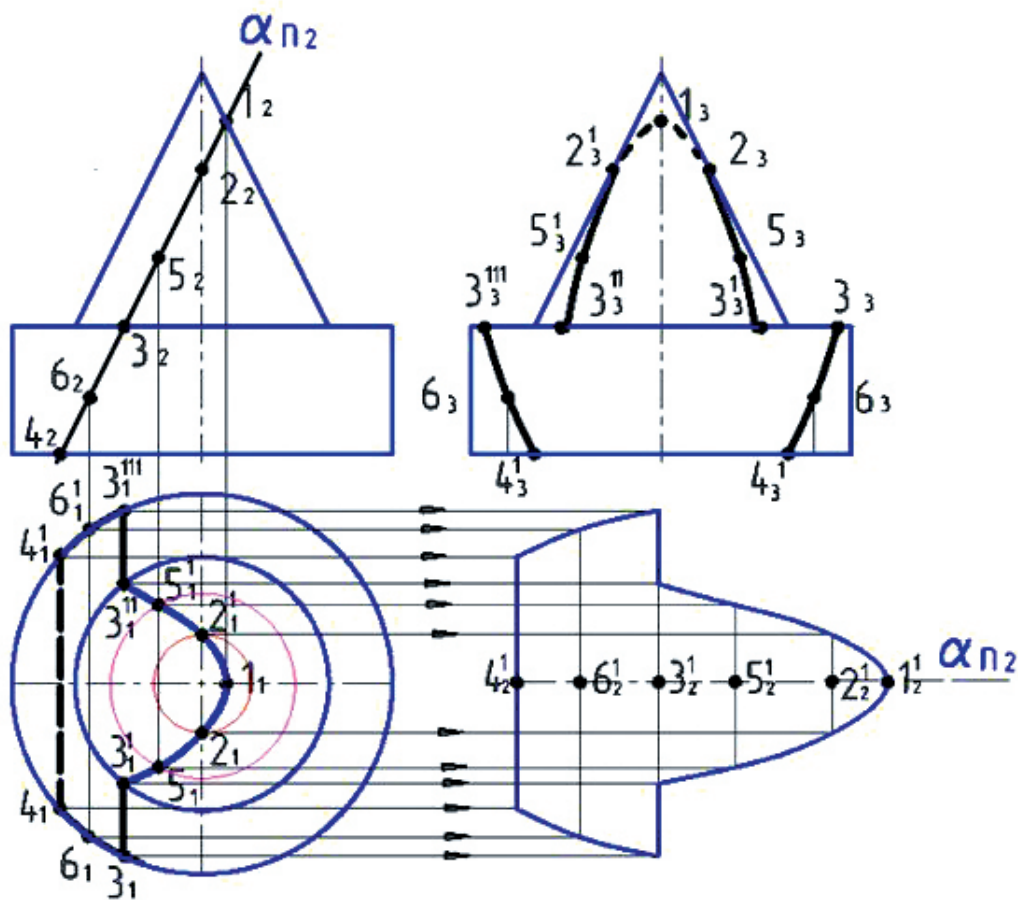


Рис. 15. Построение натуральной величины сечения.

Способ плоско-параллельного перемещения

5) *Построение натуральной величины сечения (рис. 15).*

Для построения натуральной величины сечения используется способ преобразования — плоско-параллельное перемещение.

В рассматриваемом примере заданный геометрический объект совершает плоско-параллельное перемещение, при котором все его точки движутся по произвольным плоским кривым, расположенным во фронтальных плоскостях уровня, до положения, параллель-

ного горизонтальной плоскостях проекций. Линии, по которым происходит перемещение всех точек объекта, находятся в плоскости уровня.

Фронтальная проекция сечения $\alpha_{\Pi_2}(4_2-6_2-3_2-5_2-2_2-1_2)$ плоско-параллельно перемещается до положения, параллельного горизонтальной плоскости проекций $(4_2^1-6_2^1-3_2^1-5_2^1-2_2^1-1_2^1)$. Расстояние между точками на следе α_{Π_2} не меняется при плоско-параллельном перемещении следа.

При перемещении фронтальной проекции сечения величина координаты Y всех точек не меняется. Положение точек на натуральной величине сечения определяется на пересечении линий связи, проведенных из новых фронтальных проекций точек $4_2^1-6_2^1-3_2^1-5_2^1-2_2^1-1_2^1$ и из горизонтальных проекций точек $4_1, 6_1, 3_1, 3_1^1, 5_1, 2_1, 1_1$ и т. д.

Построенное сечение обычно заштриховывают. Линии штриховки проводят под углом 45° к основной надписи, расстояние между линиями штриховки может быть 1–10 мм. В приведенном приложении 1 в заданиях рационально расстояние между линиями штриховки принимать 5 мм.

2. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Линия пересечения поверхностей — совокупность точек, одновременно принадлежащих пересекающимся поверхностям. Вид линии пересечения поверхностей зависит от пересекающихся поверхностей:

- ◇ линия пересечения многогранников — ломаная линия;
- ◇ линия пересечения многогранника и поверхности вращения — сочетание плоских кривых линий (парабол, гипербол, эллипсов, окружностей);
- ◇ линия пересечения поверхностей вращения — пространственная, биквадратная кривая линия.

Познакомимся кратко на примерах с двумя способами построения линий пересечения поверхностей: способом вспомогательных секущих плоскостей и способом концентрических сфер.

2.1. Способ вспомогательных секущих плоскостей

Сущность способа секущих плоскостей состоит в том, что каждая точка линии пересечения поверхностей строится как точка пересечения сечений заданных поверхностей вспомогательными плоскостями. Вспомогательные секущие плоскости обычно располагают параллельно одной из плоскостей проекций или перпендикулярно оси вращения поверхности. Сечения заданных поверхностей вспомогательными плоскостями должны быть простыми геометрическими фигурами — окружности или прямоугольники (иногда треугольники). Точки пересечения сечений поверхностей являются точками линии взаимного пересечения заданных поверхностей.

Алгоритм решения задач по построению линий пересечения поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей:

1. Анализ заданных поверхностей и вида линии пересечения:
 - ◇ определить заданные поверхности и характер линии пересечения;
 - ◇ определить проецирующие поверхности — это цилиндр и призма. На плоскости проекций, к которой проецирующая поверхность перпендикулярна, проекция линии пересечения поверхностей совпадает с очерком проецирующей поверхности.
 2. Определение характерных точек линий пересечения поверхностей.
- К характерным точкам линии пересечения поверхностей относятся:
- ◇ точки пересечения очерков поверхностей;

- ◇ высшие и низшие, правые и левые точки очерков поверхностей;
- ◇ наиболее удаленные и приближенные к плоскостям проекций точки;
- ◇ точки, принадлежащие очерковым линиям поверхностей;
- ◇ точки, принадлежащие осям вращения поверхностей.

3. Построение проекции линий пересечения заданных поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей.

Количество секущих плоскостей зависит от пересекающихся поверхностей и выбирается индивидуально.

4. Соединение построенных точек в соответствии с видом линии пересечения.

5. Определение видимости поверхностей и проекций линии пересечения. Необходимо изобразить изображение поверхностей и построенные линии пересечения с учетом видимости.

Рассмотрим пример построения линии пересечения поверхностей, представляющей сочетание плоских кривых линий, и пример построения линии пересечения поверхностей, являющейся пространственной кривой линией.

Пример 3. Построение линии пересечения поверхностей конуса и трехгранной призмы (рис. 16).

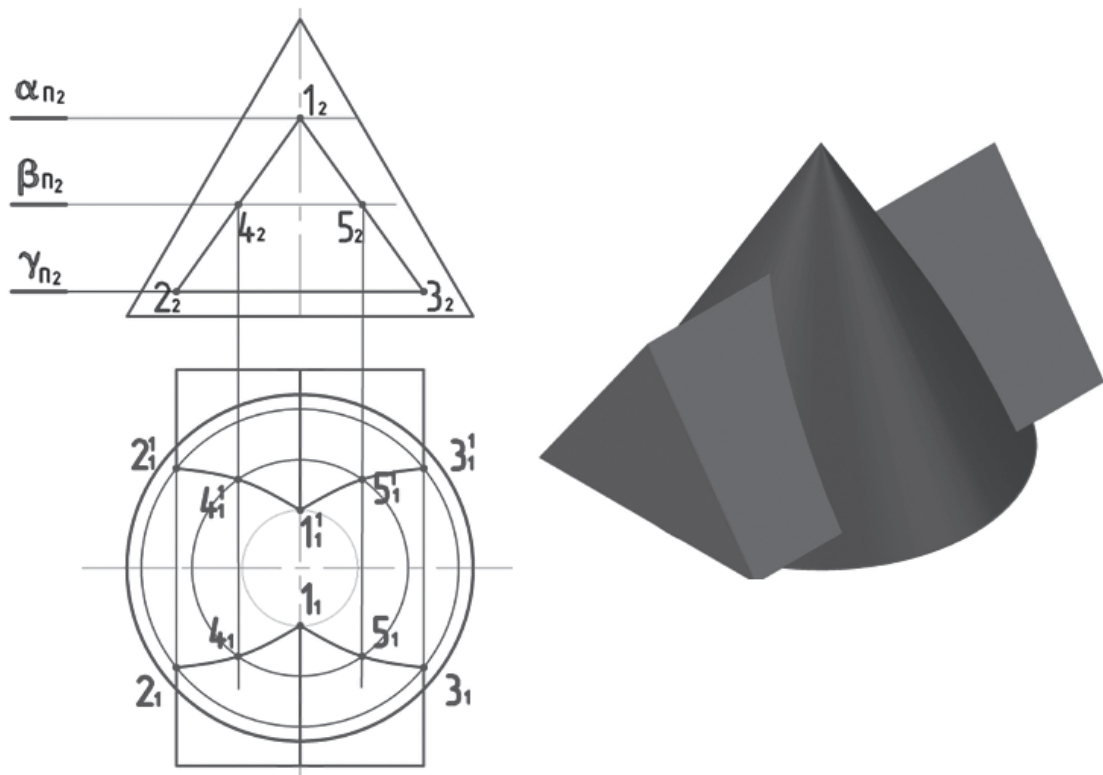


Рис. 16. Линия пересечения поверхности конуса и трехгранной призмы

1) Анализ заданных поверхностей и вида линии пересечения.

Представленная в примере призма располагается перпендикулярно фронтальной плоскости проекций. Все ее образующие располагаются перпендикулярно фронтальной плоскости проекций. Поэтому линия пересечения поверхностей на фронтальной плоскости совпадает с очерком призмы $1_2-2_2-3_2$.

Линия пересечения заданных поверхностей состоит из трех плоских кривых, по которым грани-плоскости призмы пересекают поверхность конуса (см. табл. 4). Линии пе-

ресечения 1–2 и 1–3 представляют собой части эллипсов, а линия 2–3 — часть окружности. Фронтальные проекции точек 1, 4, 2, 3 и 5 располагаются на видимой стороне поверхностей и закрывают на фронтальной плоскости проекции точки 1^1 , 4^1 , 2^1 , 3^1 и 5^1 . На рис. 16 обозначены только видимые точки 1, 4, 2, 3 и 5.

2) Определение характерных точек линий пересечения поверхностей.

Характерными точками линии пересечения заданных поверхностей являются точки 1, 2 и 3. Точка 1 — самая верхняя точка линии пересечения поверхностей, точки 2 и 3 — крайняя левая и крайняя правая точки пересечения поверхностей. Положение промежуточных точек 4 и 5 выбрано произвольно.

3) Построение проекций линий пересечения поверхностей.

Для построения горизонтальных проекций точек линии пересечения поверхностей необходимо провести вспомогательные горизонтальные плоскости уровня α , β , γ , которые пересекают поверхность конуса по окружностям (рис. 17). Радиусы R окружностей определяются расстоянием от оси вращения конуса до очерка конуса по проведенной плоскости. Окружности проецируются в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекций.

Горизонтальные плоскости уровня α , β и γ пересекают призму по прямоугольникам, которые проецируются на горизонтальную плоскость в натуральную величину (рис. 17).

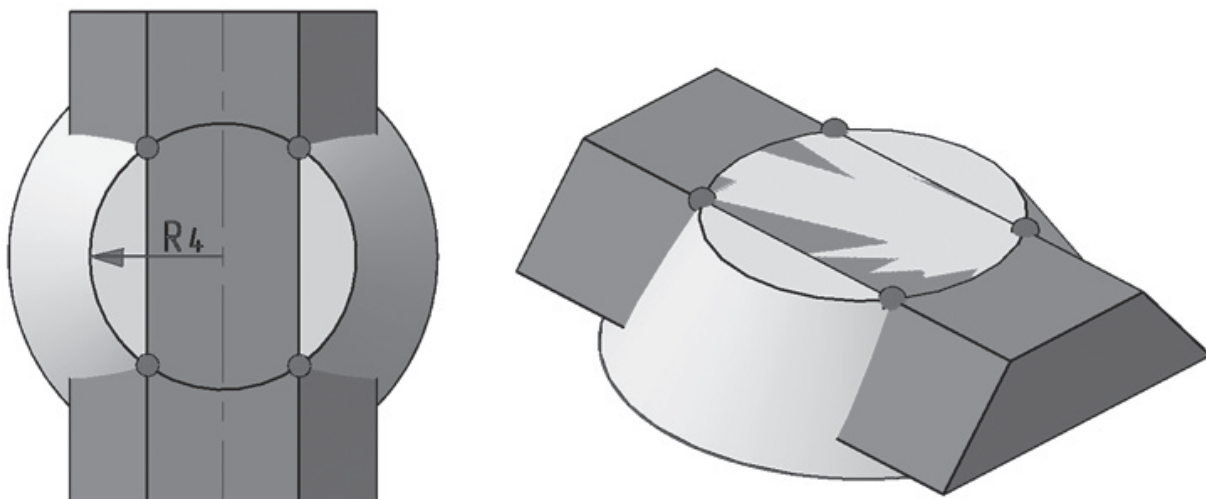


Рис. 17. Построение горизонтальных проекций точек 4 и 5 линии пересечения конуса и призмы

Горизонтальные проекции точек 2, 3, 4 и 5 определяются на пересечении сечений поверхностей вспомогательными плоскостями: окружностей и прямоугольников (рис. 16, 17). Величина сечений конуса и призмы меняется в каждой плоскости. На рис. 17 показано построение горизонтальной проекции точек 4 и 4^1 , 5 и 5^1 .

Построение профильных проекций точек, принадлежащих линии пересечения поверхности призмы и конуса (рис. 18), начинается с проведения горизонтальных линий проекционной связи от фронтальных проекций точек. Профильная проекция точек 1 и 1^1 принадлежит профильным очерковым образующим конуса.

Для построения профильных проекций точек 4 и 4^1 , 2 и 2^1 необходимо измерить расстояние от горизонтальной оси симметрии конуса до горизонтальной проекции точки Y_2 и Y_4 (это координата Y точек 4 и 2 относительно горизонтальной оси симметрии конуса) и отложить Y_2 и Y_4 на профильной плоскости проекций влево и вправо от вертикальной оси симметрии конуса.

Профильные проекции точек 3 и 3^1 , 5 и 5^1 совпадают с проекциями точек 2 и 2^1 , 4 и 4^1 . На рис. 18 обозначены только видимые точки 2 и 4.

4) Соединение построенных точек $1_1-4_1-2_1$ и $1_1-5_1-3_1$ плавной кривой линией, так как это части эллипсов. Линия 2_1-3_1 — часть окружности.

5) Определение видимости линий пересечения.

На горизонтальной плоскости проекций часть окружности 2_1-3_1 невидима. Основание конуса под призмой также невидимо (рис. 18).

На профильной плоскости проекций видимая часть линий пересечения $1-4-2$ закрывает невидимую часть линии пересечения $1-5-3$. На чертеже обозначены только видимые точки.

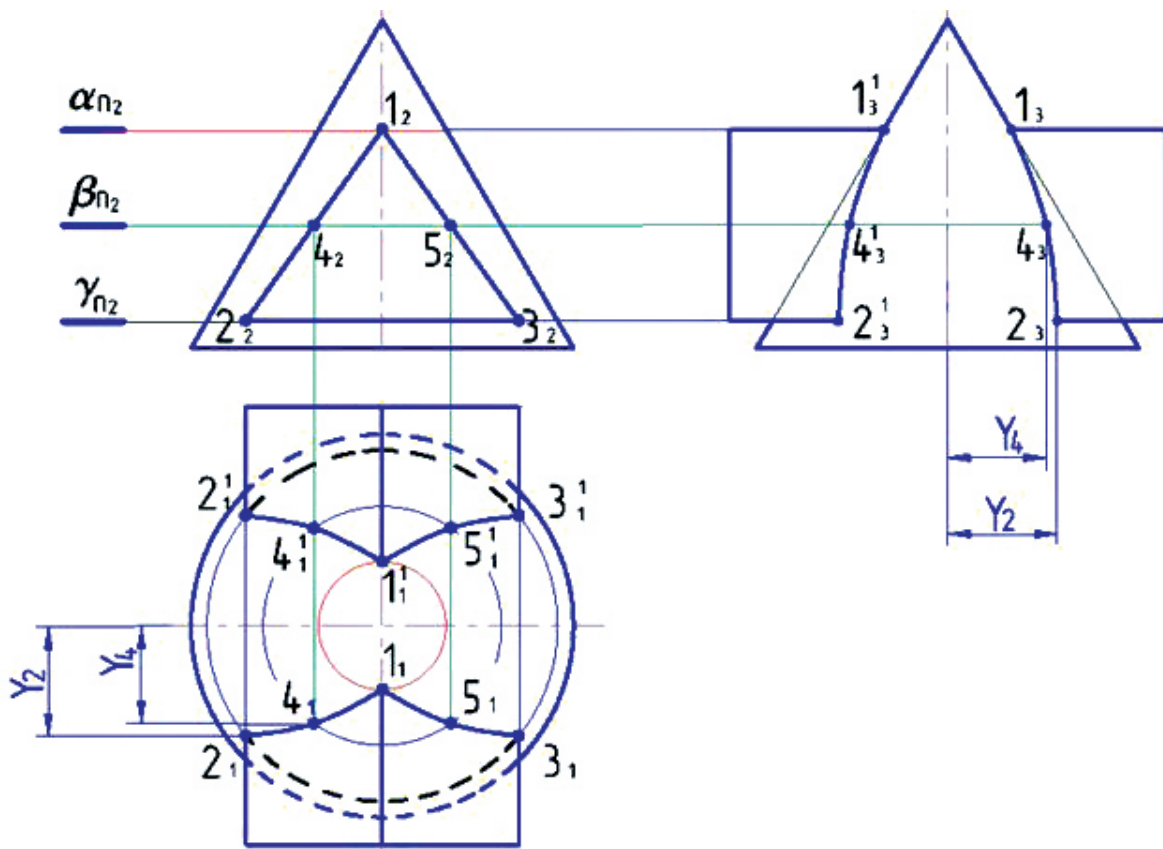


Рис. 18. Построение профильных проекций точек линии пересечения конуса и призмы

Пример 4. Построение линии пересечения поверхностей цилиндра и полусферы (рис. 19).

1) Анализ заданных поверхностей и вида линии пересечения.

Цилиндр в представленном примере является горизонтально проецирующей поверхностью, так как все его образующие располагаются перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций, поэтому линия пересечения совпадает с очерком цилиндра на горизонтальной плоскости проекций.

Линия пересечения в данном примере является биквадратной пространственной кривой линией.

2) Определение характерных точек линий пересечения поверхностей.

Определять характерные точки и проводить вспомогательные секущие плоскости нужно на горизонтальной плоскости проекций, так как линия пересечения совпадает с очерком цилиндра на горизонтальной плоскости проекций (см. выше).

Характерными точками линии пересечения заданных поверхностей являются (рис. 19):

- ◇ точка 1 — крайняя левая точка очерка цилиндра;
- ◇ точки 3 и 3¹ — верхняя и нижняя точки очерка поверхности цилиндра;
- ◇ точки 4 и 4¹ — точки пересечения очерков поверхностей цилиндра и полусферы.

Точка 1 располагается на главном меридиане сферы. Нужно построить ее фронтальную проекцию на пересечении вертикальной линии связи, проведенной от ее горизонтальной проекции, и фронтальной проекции главного меридиана.

Точки 4 и 4¹ располагаются на пересечении экватора полусферы и очерка цилиндра на горизонтальной плоскости проекций. Их фронтальные проекции строятся на пересечении фронтальной проекции экватора и вертикальной линий связи, от горизонтальных проекций точек.

3) *Построение проекций промежуточных точек линии пересечения поверхностей.*

Для построения фронтальных проекций точек 2 и 2¹, 3 и 3¹ нужно провести фронтальные секущие плоскости α и α^1 , β и β^1 , расположенные симметрично относительно оси симметрии цилиндра (рис. 19).

Плоскости α и β пересекают сферу по окружностям, радиусы которых равны расстоянию от оси вращения полусферы до очерка полусферы по секущей плоскости. Окружности проецируются в натуральную величину на фронтальную плоскость проекций (рис. 19).

Плоскости β и β^1 пересекают цилиндр по прямоугольникам (рис. 19), которые проецируются на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину, а плоскость α касается цилиндра.

Окружности и прямоугольники на фронтальной плоскости проекций пересекаются и определяют фронтальные проекции точек 2 и 2¹, 3 и 3¹. На рис. 19 на фронтальной плоскости проекций обозначены только видимые точки 1, 2, 3 и 4.

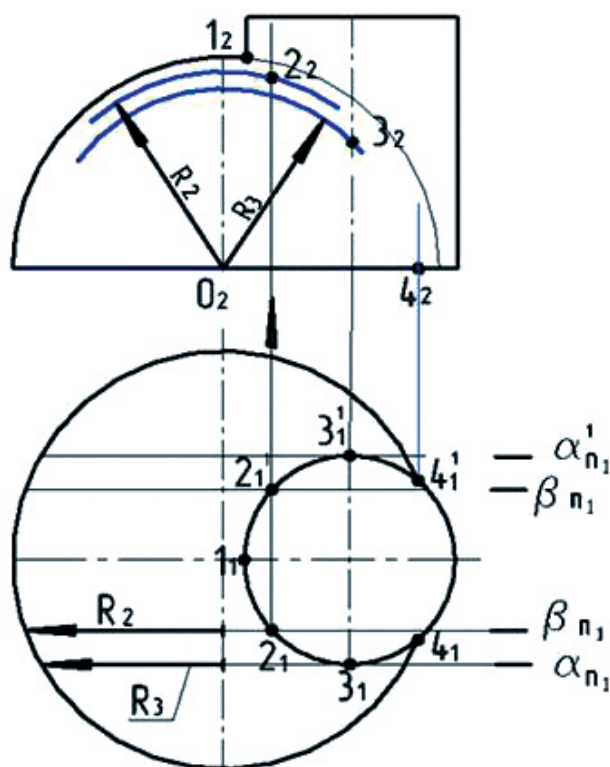


Рис. 19. Пересечение полусферы и цилиндра. Построение фронтальных проекций точки 2 и 3

Построение профильных проекций точек (рис. 20), принадлежащих линии пересечения поверхностей, начинается с проведения горизонтальных линий связи от фронтальных проекций точек 1, 2, 3.

Точка 1 принадлежит главному меридиану сферы, профильная проекция которого совпадает с вертикальной осью сферы.

Профильные проекции точек 3 и 3¹ принадлежат очерковым образующим цилиндра для профильной плоскости проекций.

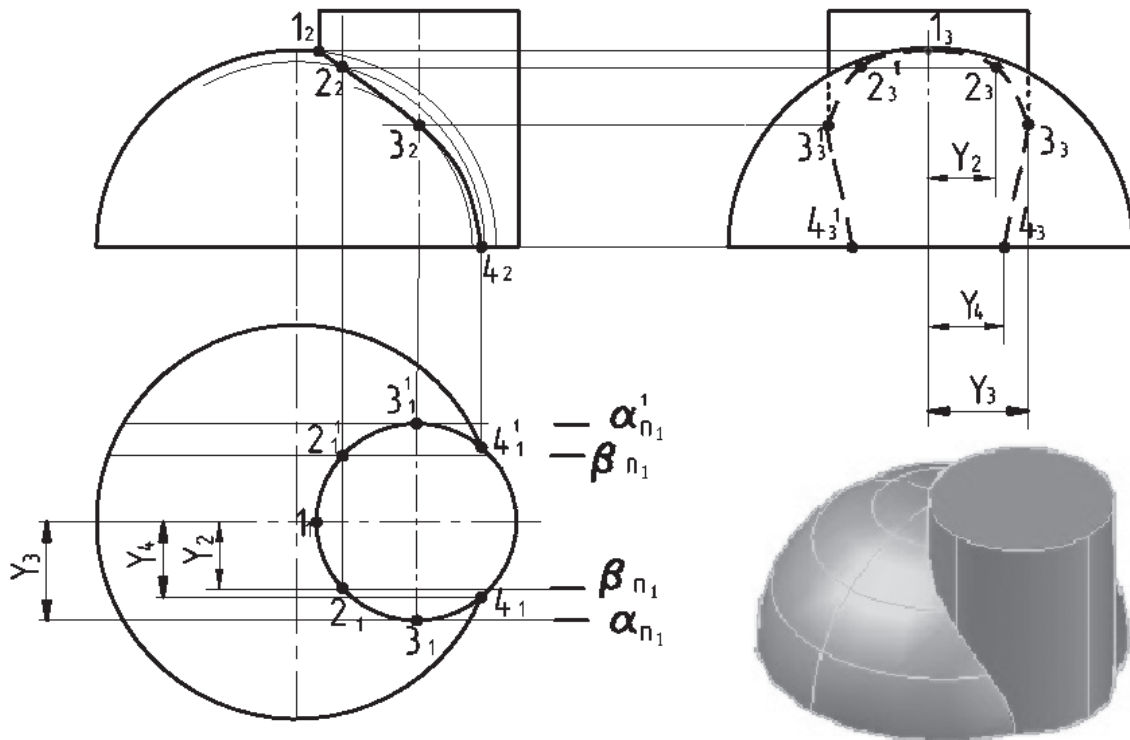


Рис. 20. Построение профильных проекций точек линии пересечения полусферы и цилиндра

Точки 4 и 4¹ принадлежат экватору сферы. На горизонтальной плоскости проекций нужно измерить расстояния от горизонтальной оси симметрии сферы до горизонтальной проекции точек 2, 4 и 3 (это величина координаты Y точки относительно оси симметрии сферы Y_2 , Y_4 и Y_3) и отложить эти расстояния на профильной плоскости проекций от вертикальной оси симметрии сферы.

4) Определение видимости поверхностей и линии их пересечения.

На фронтальной плоскости проекций (рис. 20) видимая (передняя) часть линии пересечения (1–2–3–4) совпадает и закрывает невидимую часть линии пересечения (2¹–3¹–4¹).

На профильной плоскости проекций линия пересечения полусферы и цилиндра невидима, так как закрыта очерком сферы.

Образующие цилиндра, закрытые очерком сферы на профильной плоскости проекций, частично невидимы.

Пример 5. Построение линии пересечения поверхностей цилиндра и тора-кольца (рис. 21).

1) Анализ заданных поверхностей и вида линии пересечения.

В представленном примере пересекаются четверть поверхности тора-кольца, ось вращения которого перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, и цилиндр прямой круговой, ось вращения которого перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. Все образующие цилиндра являются горизонтально проецирующими прямыми,

поэтому линия пересечения заданных поверхностей на горизонтальной плоскости проекций совпадает с очерком цилиндра.

2) *Определение характерных точек линии пересечения поверхностей.*

Определять характерные точки и проводить вспомогательные секущие плоскости нужно на горизонтальной плоскости проекций, так как линия пересечения совпадает с очерком цилиндра на горизонтальной плоскости проекций (см. выше).

Характерными точками линии пересечения являются точки:

- 1 — крайняя левая точка очерка цилиндра;
- 3 — крайняя правая точка очерка цилиндра;
- 2 и 4 — нижняя и верхняя точки очерка цилиндра.

3) *Построение проекций линии пересечения поверхностей.*

Фронтальные проекции точек 1 и 3, 1^1 и 3^1 лежат на пересечении крайних левой и правой образующих цилиндра и очерка тора-кольца.

Для построения фронтальной проекции точки 2 нужно провести через точку 2 фронтальную плоскость уровня α . Эта плоскость касается поверхности цилиндра по образующей и пересекает тор-кольцо по кольцу (рис. 21). Максимальный радиус R_{\max} сечения-кольца равен расстоянию от оси вращения тора до его внешнего очерка, а минимальный радиус R_{\min} сечения-кольца равен расстоянию от оси вращения тора до внутреннего очерка тора по плоскости α . Положение точки 2_2 определяется на пересечении фронтальных проекций сечений поверхностей. Точка 4_2 располагается на невидимой стороне цилиндра и совпадает на фронтальной плоскости проекций с точкой 2_2 , поэтому на чертеже не обозначена.

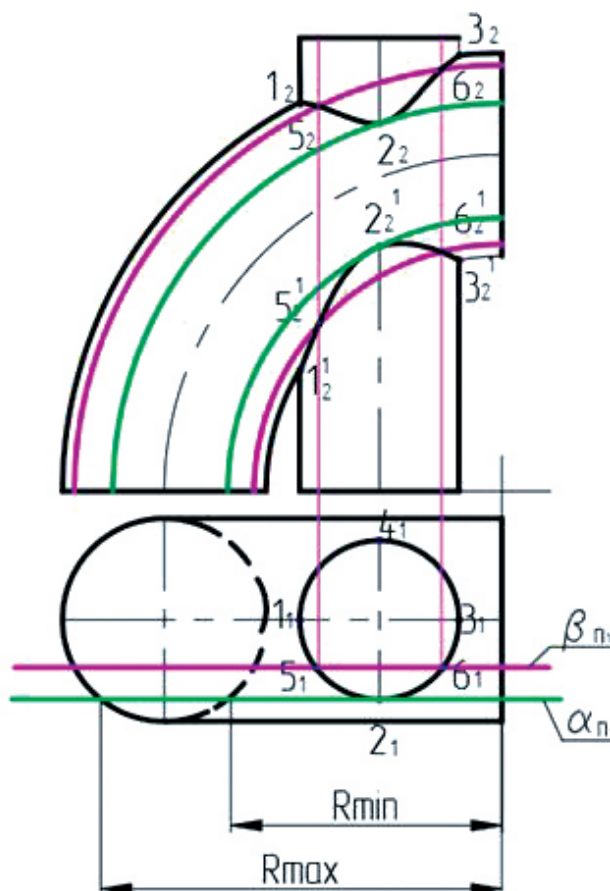


Рис. 21. Линия пересечения тора-кольца и цилиндра

Для построения фронтальных проекций промежуточных точек 5 и 6, 5^1 и 6^1 (эти точки выбраны произвольно на очерке цилиндра) необходимо провести вспомогательную фронтальную плоскость уровня β , которая пересекает тор по кольцу и цилиндр по прямоугольнику. Пересекаясь на фронтальной плоскости проекций, сечения поверхностей образуют точки 5_2 и 6_2 , 5_2^1 и 6_2^1 , принадлежащие линии пересечения поверхностей тора и цилиндра.

Построенная линия пересечения имеет видимую и невидимую стороны. На чертеже обозначены точки, расположенные на видимой стороне поверхности цилиндра.

2.2. Способ вспомогательных концентрических сфер

Основной принцип способа концентрических сфер заключается в следующем: сфера с поверхностями вращения, оси которых проходят через центр сферы, пересекается по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения поверхности (рис. 22).

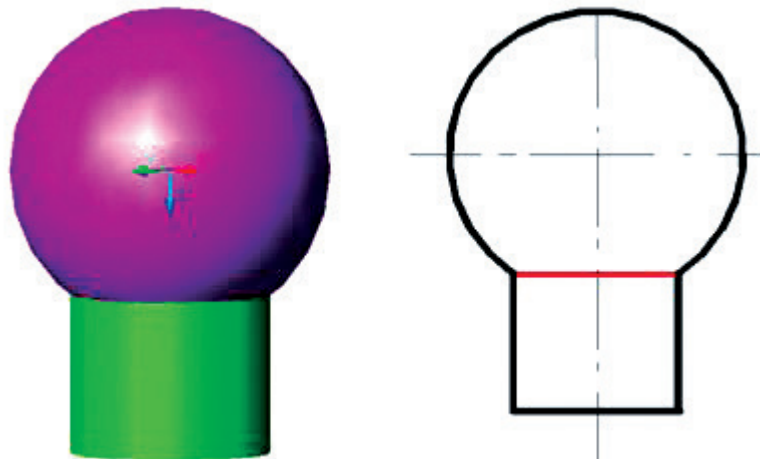


Рис. 22. Основной принцип способа концентрических сфер

Способ концентрических сфер можно использовать для построения линии пересечения поверхностей если:

- ♦ пересекаются поверхности вращения;
- ♦ оси поверхностей вращения пересекаются;
- ♦ поверхности имеют общую плоскость симметрии.

Алгоритм решения задач методом концентрических сфер:

1. Начертить по размерам заданную фронтальную проекцию поверхностей.
2. Определить характер кривой линии пересечения поверхностей. Так как обе заданные поверхности — поверхности вращения, то линия их пересечения — биквадратная пространственная кривая. В задании (приложение 3) обе поверхности вращения имеют общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Поэтому фронтальная проекция линии их пересечения является кривой второго порядка.
3. Определить точку пересечения осей вращения заданных поверхностей.
4. Обозначить характерные точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей. Вследствие условий, указанных в пункте 2, характерные точки будут совпадать с точками пересечения очерков поверхностей.

5. Построить промежуточные точки линии пересечения методом концентрических сфер-посредников, для этого:

- ◇ определить центр сфер-посредников. Как правило, это точка O_2 пересечения осей вращения поверхностей на фронтальной плоскости;
- ◇ выявить пределы изменения радиуса сферы-посредника:

$$R_{\min} < R < R_{\max},$$

при этом R_{\max} равно расстоянию от построенного центра сфер до наиболее удаленной точки пересечения очерков поверхностей, а R_{\min} — радиусу сферы, вписанной в большую поверхность. Он определяется бóльшим перпендикуляром к образующим заданных поверхностей из точки O ;

- ◇ построить сферу минимального радиуса, которая касается большей поверхности по окружности и пересекает меньшую поверхность по окружности. Точки пересечения двух окружностей — общие точки для двух поверхностей вращения, а следовательно, они принадлежат линии пересечения этих поверхностей.

Каждая из окружностей лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения соответствующей поверхности. Так как оси вращения обеих поверхностей параллельны фронтальной плоскости, окружности проецируются на Π_2 в виде прямолинейных отрезков, перпендикулярных осям вращения поверхностей;

- ◇ провести еще несколько вспомогательных сфер радиусом больше минимального и меньше максимального. При построении каждой сферы найти линии ее пересечения с каждой заданной поверхностью, а затем точки пересечения линий пересечения;
- ◇ если сфера минимального радиуса является общей для двух поверхностей, т.е. одновременно оказалась вписанной в обе поверхности, тогда имеет место частный случай пересечения поверхностей. При этом проекция линии пересечения строится значительно проще: находятся точки пересечения очерков поверхностей и попарно соединяются прямыми линиями крест-накрест от опорных точек (теорема Монжа).

6. Соединить полученные точки плавной кривой линией.

7. Обвести проекции поверхностей и линии их пересечения с учетом видимости.

Пример 6. Построение проекции линии пересечения конуса и цилиндра методом вспомогательных концентрических сфер (рис. 23).

1. Нужно начертить проекции заданных поверхностей и определить точку пересечения осей вращения O_2 .

2. Характерные точки 1 и 2 — это точки пересечения очерков поверхностей.

3. Из точки пересечения осей вращения поверхностей O_2 проводятся перпендикуляры к образующим заданных поверхностей и определяется больший. В приведенном примере это перпендикуляр к образующей конуса — отрезок $O_2 A_2$.

4. Чертится вспомогательная сфера минимального радиуса $O_2 A_2$ с центром в точке O_2 (рис. 23). Минимальная сфера касается поверхности конуса по окружности, проходящей через точку A_2 , и пересекает поверхность цилиндра по окружности. Окружности располагаются перпендикулярно осям вращения поверхностей и поэтому проецируются в прямые линии, перпендикулярные осям вращения поверхностей. Общая для заданных поверхностей точка 3 лежит на пересечении построенных проекций окружностей.

5. Величина радиуса максимальной сферы равна расстоянию от центра сфер до наиболее удаленной точки пересечения очерков поверхностей $R_{\max} = O_2 2_2$.

6. Строятся сферы радиусом большим, чем минимальная сфера, но меньше максимальной сферы (рис. 23). Определяются линии пересечения сфер с конусом и цилиндром: это окружности, которые проецируются в прямые, перпендикулярные осям вра-

щения поверхностей. Точки пересечения прямых-окружностей определяют общие для поверхностей точки 4 и 5.

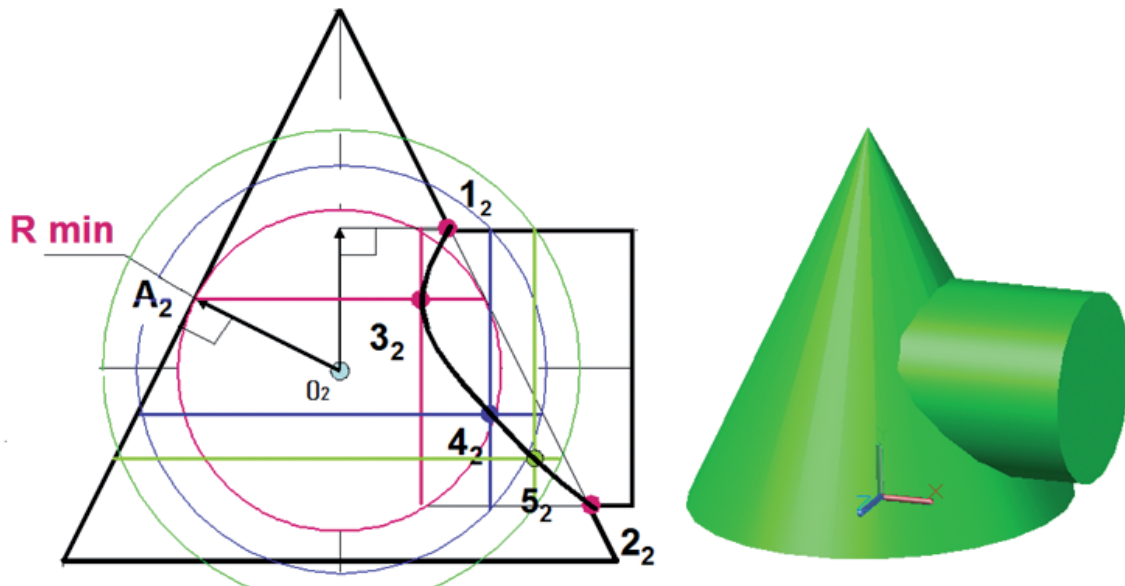


Рис. 23. Построение линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра методом вспомогательных концентрических сфер

Все проекции линий пересечения вспомогательных сфер с заданными поверхностями образуют два семейства параллельных прямых, перпендикулярных соответствующим проекциям осей вращения поверхностей. Пересечение прямой линии одного семейства с соответствующей прямой линией другого семейства дает искомые проекции точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей.

7. Плавной кривой видимой линией соединяются построенные точки линии пересечения конуса и цилиндра. Видимая часть линии пересечения (располагается на передней части поверхностей) совпадает и закрывает невидимую часть линии пересечения.

Пример 7. Построение проекции линии пересечения поверхностей двух цилиндров (рис. 24).

Алгоритм решения задач способом концентрических сфер не меняется в зависимости от пересекающихся поверхностей. Отличие заключается лишь в определении радиусов минимальной и максимальной сфер. Характерные точки пересечения очерков поверхностей — это точки 1_2 и 2_2 .

Из точки пересечения осей вращения поверхностей O_2 проводятся перпендикуляры на образующие поверхностей цилиндров. Большой перпендикуляр определяет радиус минимальной сферы. На рис. 24 минимальная сфера касается горизонтально расположенного цилиндра по окружности, расположенной перпендикулярно оси вращения цилиндра. Минимальная сфера пересекает вертикальный цилиндр также по окружности, которая перпендикулярна оси вращения цилиндра, и поэтому проецируется в прямую линию, перпендикулярную оси вращения цилиндра. Точка A_2 — точка пересечения окружностей, принадлежит линии пересечения поверхностей. Радиус максимальной сферы равен расстоянию от точки O_2 до точки пересечения очерков поверхностей 1_2 или 2_2 , положение которых определяет сфера максимального радиуса.

Вспомогательная сфера с величиной радиуса в пределах от R_{min} до R_{max} (рис. 24) пересекает горизонтально расположенный цилиндр по двум окружностям и вертикальный цилиндр по окружности, которые проецируются в прямые линии, перпендикулярные

осям вращения поверхностей. Пересекаясь, окружности определяют еще две точки — В и С, принадлежащие линии пересечения цилиндров.

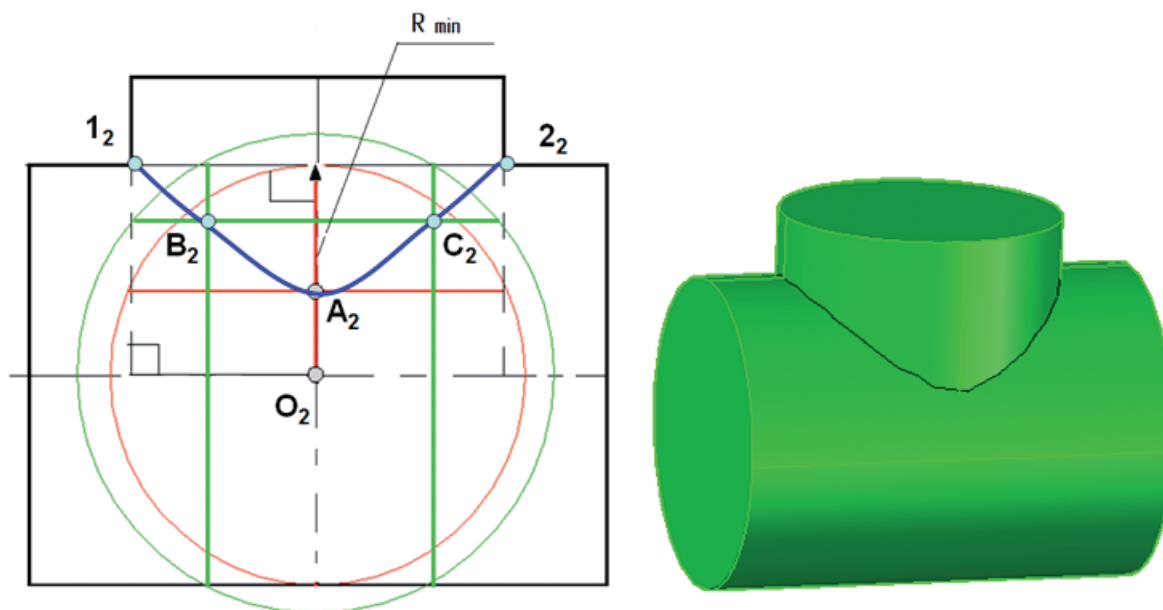


Рис. 24. Построение линии пересечения двух цилиндров

2.3. Развертки поверхностей

Развертка поверхности — это плоская фигура, которая получается совмещением всей боковой поверхности тела с плоскостью. Если совмещение происходит без разрывов и складок, поверхность называют **развертываемой**. К развертываемым поверхностям относятся многогранные, цилиндрические, конические поверхности.

Тела, боковая поверхность которых не может быть совмещена с плоскостью, называют **неразвертываемыми**. Например, сфера, торы и т.д. В практике приходится строить развертки и неразвертываемых поверхностей.

Развертки поверхностей:

- ◇ точные — выполненные графоаналитическим методом (рис. 25, 26);
- ◇ приближенные — выполненные способом аппроксимации (рис. 27, 28);
- ◇ условные — развертки неразвертываемых поверхностей. При построении таких разверток используют способ двойной аппроксимации.

Аппроксимация — это замена заданной поверхности описанной или вписанной в нее гранной поверхностью (близкой к исходной). Например: поверхность цилиндра аппроксимируют вписанной в него поверхностью призмы, а поверхность конуса заменяют вписанной в него поверхностью пирамиды. В основе аппроксимации лежит способ малых хорд — дугу делят на как можно большее количество хорд, затем откладывают их на прямой линии, определяя таким образом длину дуги и получая развертку дуги. Длина дуги или окружности, определенная способом аппроксимации, искажается, и поэтому развертки поверхностей, построенные способом аппроксимации, называют приближенными.

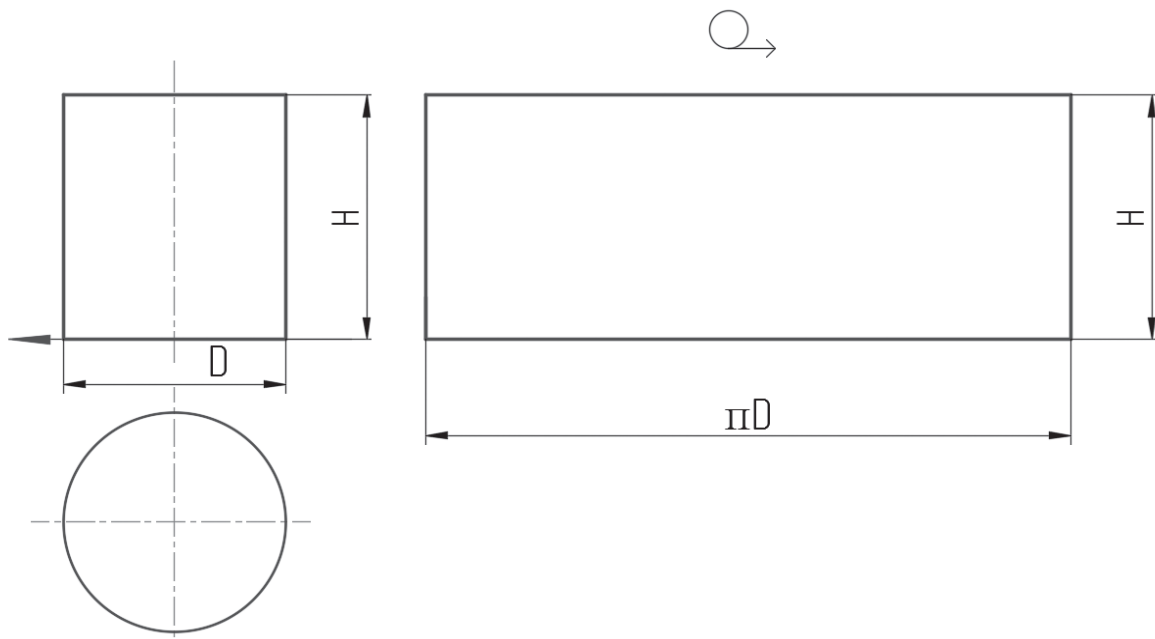


Рис. 25. Точная развертка боковой поверхности цилиндра прямого кругового

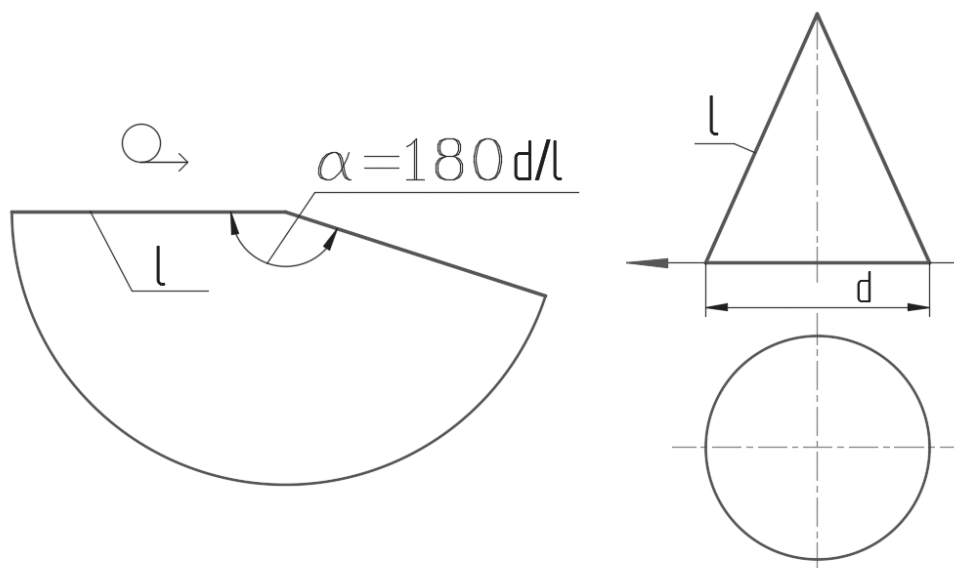


Рис. 26. Точная развертка боковой поверхности конуса прямого кругового

Последовательность выполнения аппроксимации

1. В круговое основание заданной поверхности вписывают *правильный многоугольник* (12-или 24-угольники). Так как стороны правильного многоугольника имеют одинаковую величину, то «ошибка» по величине развертки распределяется равномерно по всей длине развертки. На развертке длину окружности определяют как периметр вписанного в окружность многоугольника.

2. Через вершины многоугольника проводят ребра призмы или пирамиды.

Определение натуральных величин ребер призмы или пирамиды, необходимых для построения развертки, выполняют способами преобразований.

Способы построения разверток:

- ◇ способ нормального сечения. Нормальное сечение — это сечение поверхности плоскостью, перпендикулярной оси вращения поверхности;
- ◇ способ триангуляции;
- ◇ способ раскатки.

При построении разверток поверхностей цилиндра и конуса прямого кругового используется способ нормального сечения.

Пример 8. Построение развертки поверхности цилиндра прямого кругового с линией сечения (рис. 27).

Круговое основание цилиндра является нормальным сечением поверхности. Поверхность цилиндра аппроксимируется вписанной в него поверхностью 12-гранной призмы. Для этого в круговое основание цилиндра вписывается правильный 12-угольник $1_1-2_1-3_1-4_1-5_1-6_1-7_1-8_1-9_1-10_1-11_1-12_1$, строятся фронтальные проекции вершин многоугольника $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2, 7_2$ и через них проводятся проекции ребер призмы, от нижнего основания до плоскости сечения. Проекции точек 8, 9, 10, 11, 12 на фронтальной плоскости совпадают с проекциями точек 1, 2, 3, 4, 5, 6. На чертеже обозначены только видимые точки (рис. 27).

Развертка цилиндра — это часть прямоугольника. Длина прямоугольника на развертке определяется как сумма хорд $1_1-2_1, 2_1-3_1 \dots 10_1-11_1, 11_1-12_1, 12_1-1_1$. Длина развертки цилиндра будет несколько меньше его реальных размеров, поэтому такая развертка и называется приближенной. Образующие цилиндра и призмы параллельны фронтальной плоскости проекций и проецируются на нее в натуральную величину.

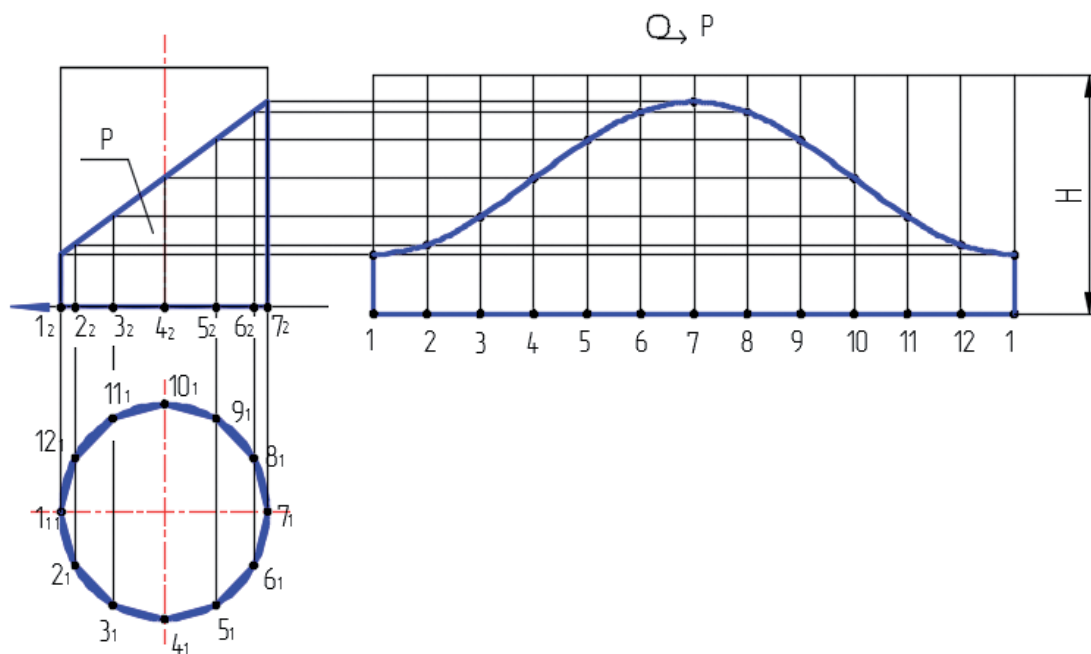


Рис. 27. Развертка боковой поверхности цилиндра вращения с линией сечения способом нормального сечения и аппроксимации

При построении развертки высота образующих определяется на фронтальной плоскости проекций. Высота каждой образующей равна высоте цилиндра от основания (нормального сечения) до линии сечения наклонной плоскостью.

Пример 9. Построение развертки поверхности конуса прямого кругового с линией сечения (рис. 28).

Первый этап (рис. 28) построения развертки конуса с линией сечения — это построение развертки конуса без линии сечения.

Выполняется аппроксимация конуса. Для этого в круговое основание конуса вписывается правильный 12-угольник $1_1-2_1-3_1-4_1-5_1-6_1-7_1-8_1-9_1-10_1-11_1-12_1$, строятся фронтальные проекции вершин многоугольника и через них проводятся проекции образующих конуса $S1, S2, S3, S4$ и т.д. Результат построения показан на рис. 28.

На фронтальной проекции конуса обозначены только видимые точки. Образующие конуса наклонены к оси вращения конуса и к плоскостям проекций.

Только крайняя правая $S7$ и крайняя левая $S1$ образующие конуса параллельны фронтальной плоскости проекций и поэтому проецируются на нее в натуральную величину.

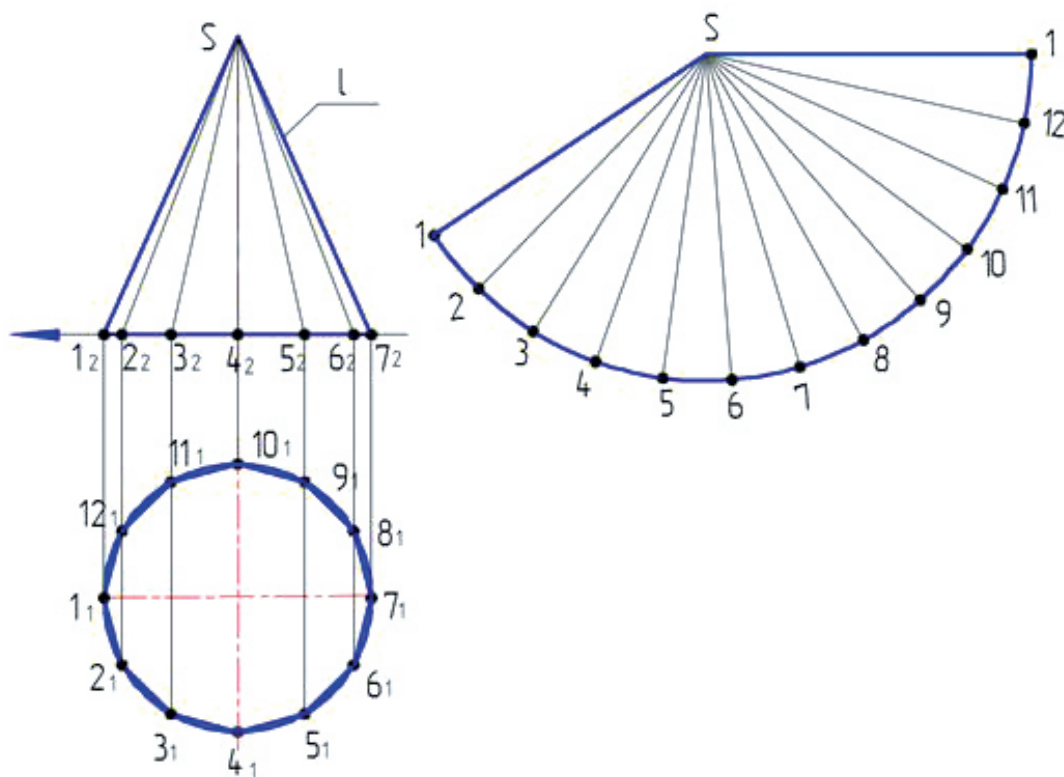


Рис. 28. Построение приближенной развертки конуса вращения без линии сечения способом нормального сечения и аппроксимации

Развертка конуса — это часть кругового сектора с величиной радиуса, равной величине образующей $S7$ или образующей $S1$. Положение точки S при построении развертки выбирается на чертеже произвольно. Из точки S проводится дуга радиусом $S1$ или $S7$. Положение точки 1 на дуге радиуса $S1$ или $S7$ выбирается произвольно, и от точки 1 на дуге с помощью циркуля откладывается двенадцать равных хорд, величина которых измеряется на горизонтальной проекции конуса. Построенные на развертке точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 соединяются с вершиной S (рис. 28).

Второй этап (рис. 29) — это построение на развертке линии сечения или пересечения поверхностей. Расстояния от вершины конуса до точек A, B, C, D, F на образующих конуса определяются способом вращения вокруг прямых, перпендикулярных плоскостям проекций.

Расстояние от вершины S до точек 1 и E измеряется на фронтальной проекции образующих $S1$ и $S7$. Для определения расстояний от вершины S до точек A, B, C, D, F образующие конуса поворачиваются до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций, то есть до совпадения с $S1$ или $S7$. Окружности, по которым вращаются точки A, B, C, D, F , располагаются в горизонтальных плоскостях и на фронтальной плоскости проекций проецируются в прямые $A_2A_2^1, B_2B_2^1, C_2C_2^1, D_2D_2^1, F_2F_2^1$.

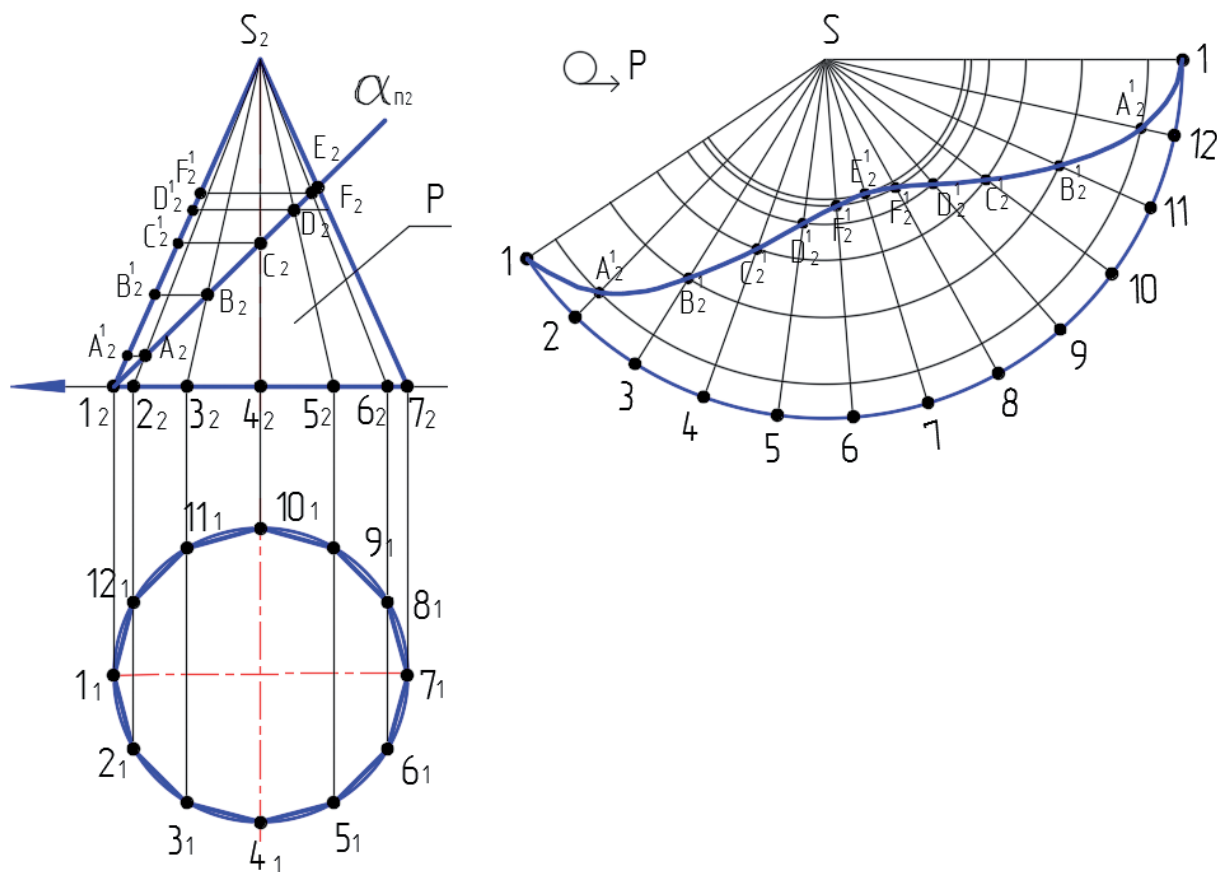


Рис. 29. Развертка конуса с линией сечения

При построении точек A, B, C, D, F, E на развертке на образующих конуса $S1, S2, S3, S4, S5$ и т.д. откладывается расстояние от вершины S до точки на левой крайней или правой крайней образующих. Например, для точки B расстояние $S_2B_2^1$, для точки C расстояние $S_2C_2^1$ и т.д.

Построенные на развертке точки $1, A_2^1, B_2^1, C_2^1$ и т.д. соединяются плавной кривой линией.

Пример 10. Построение развертки поверхности конуса с недоступной вершиной и линии сечения на его развертке (рис. 30).

Недоступной считают такую вершину, которую невозможно построить графически в пределах чертежа.

Построить развертку конуса с недоступной вершиной можно способом триангуляции. Сущность способа заключается в том, что вся боковая поверхность разворачиваемого объекта представляется в виде треугольников. В этом случае построение развертки поверхности конуса сводится к нахождению натуральных величин ребер и построению граней пирамиды, которой аппроксимируют конус. Для определения натуральных вели-

чин каждую грань усеченной пирамиды разбивают на два треугольника. Такой способ представления поверхности называют способом вспомогательных треугольников (способ триангуляции), сущность которого состоит в замене любой поверхности многогранной поверхностью с треугольными гранями. Этот способ может быть использован и для построения разверток неразвертываемых поверхностей.

Рассмотрим последовательность построения развертки способом триангуляции. Сначала строится развертка конуса недеформированного, без линий сечения или пересечения (рис. 30, а). Затем на построенной развертке строится линия сечения.

Заданная поверхность усеченного конуса аппроксимируется 12-гранной усеченной пирамидой. Для этого в круговое основание конуса вписывается 12-угольник (рис. 30, б), через вершины многоугольника проводятся ребра пирамиды. Каждая грань пирамиды — трапеция, боковые стороны которой равны (рис. 30, в).

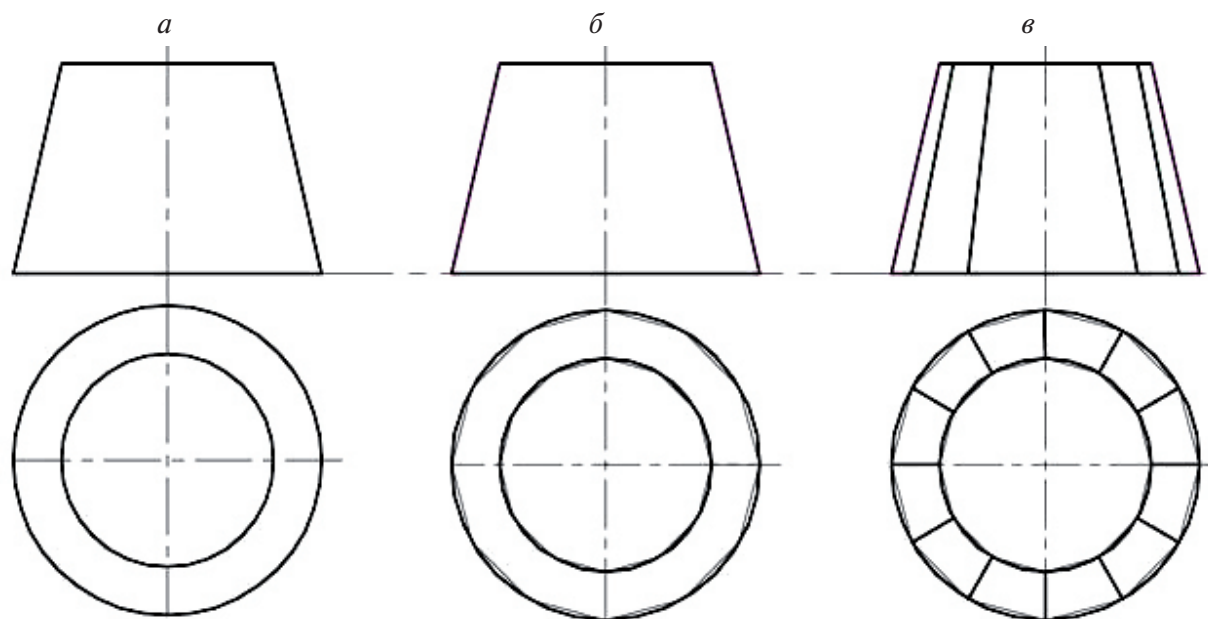


Рис. 30. Построение развертки конуса с недоступной вершиной способом триангуляции:

- а — поверхность конуса с недоступной вершиной;
 б — круговые основания конуса аппроксимированы правильным 12-угольником;
 в — через вершины многоугольника проведены ребра пирамиды

Проводятся диагонали трапеций (рис. 31) — таким образом, вся поверхность усеченного конуса будет представлена в виде треугольников 1–2–3, 3–2–4, 3–4–5, 5–4–6, 5–6–7, 7–6–8 и т. д. Стороны треугольников равны хордам верхнего основания конуса (2_1-4_1 , 4_1-6_1 , 6_1-8_1) или нижнего основания конуса (1_1-3_1 , 3_1-5_1 , 5_1-7_1), боковым сторонам трапеции (1_1-2_1 , 3_1-4_1 , 5_1-6_1 , 7_1-8_1) и диагоналям трапеции (1_1-10_1 , 3_1-2_1 , 5_1-4_1 , 7_1-6_1). Хорды верхнего и нижнего основания конуса проецируются в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекций. Натуральная величина боковых сторон трапеций равна величине крайней левой и правой очерковых образующей конуса 1_2-2_2 . Все диагонали трапеций равны, и их натуральная величина $1_2-10_2^I = 1-10 = 2-3 = 5-4 = 7-6$ определяется способом вращения вокруг оси u , перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций (рис. 31).

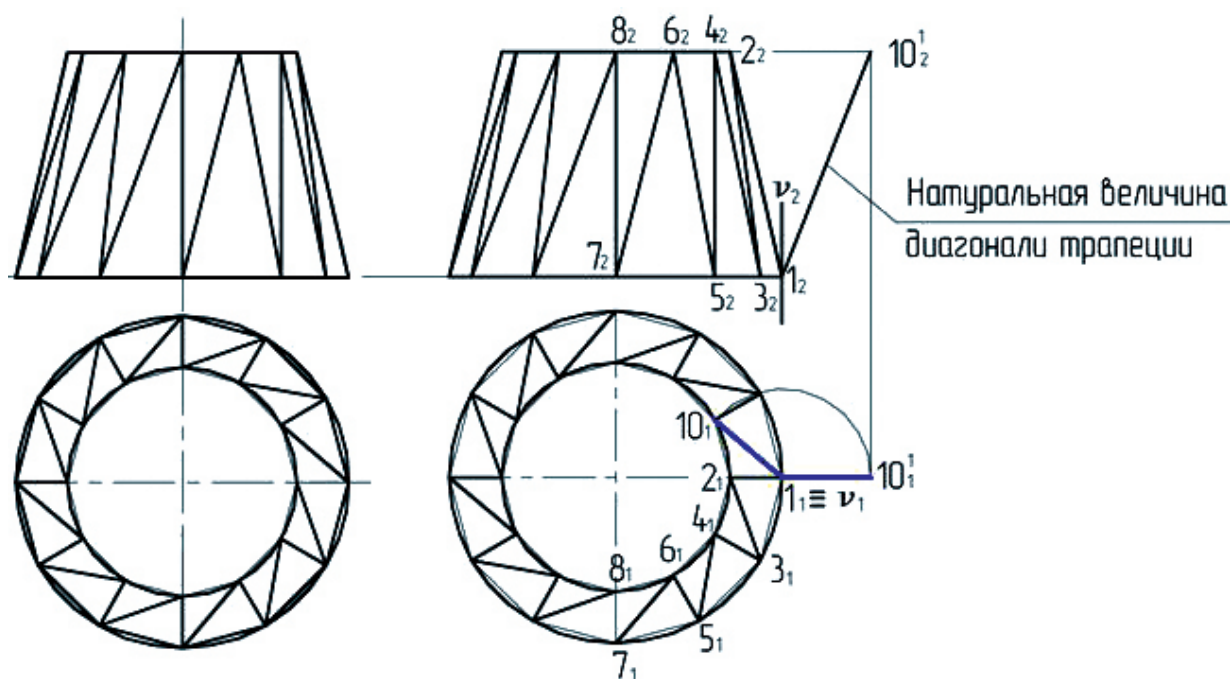


Рис. 31. Построение развертки конуса с недоступной вершиной способом триангуляции:

a — проведены диагонали трапеций, заменяющих боковую поверхность конуса;

b — определяется натуральная величина диагонали трапеции

Построение развертки выполняется последовательным построением треугольников по трем известным сторонам с помощью засечек (рис. 32) — каждая последующая точка треугольника строится на пересечении двух дуг известных радиусов. Например, построим треугольник 1–2–3 и затем 2–3–4. На свободном поле чертежа чертится отрезок длиной 1_2-2_2 , направление отрезка выбирается произвольно. Точка 3 строится на пересечении двух дуг: первая проводится из точки 1 радиусом 1_1-3_1 , вторая — из точки 2 радиусом $2-3$ ($2-3$ равно $1-10$). Используя построенные вершины треугольника 2 и 3, строим точку 4 на пересечении двух дуг: первая дуга проводится из точки 2 радиусом 2_1-4_1 , вторая — из точки 3 радиусом $3-4$ ($3-4$ равно $1-2$) и т. д.

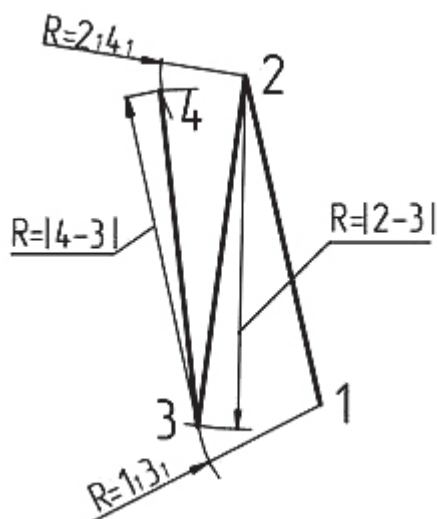


Рис. 32. Построение треугольника по трем известным сторонам

Построение развертки выполняется путем повторения одних и тех же геометрических построений. На рис. 33 построена половина развертки конуса с недоступной вершиной способом триангуляции. Символ «развернуто» выполнен в соответствии с ГОСТ 2.305–2008.

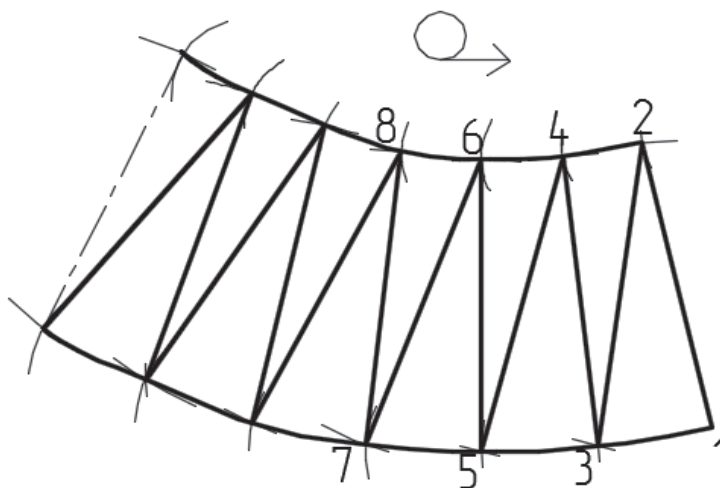


Рис. 33. Развертка половины конуса с недоступной вершиной, построенная способом триангуляции

Построим на развертке конуса с недоступной вершиной линию его пересечения со сферой (рис. 34).

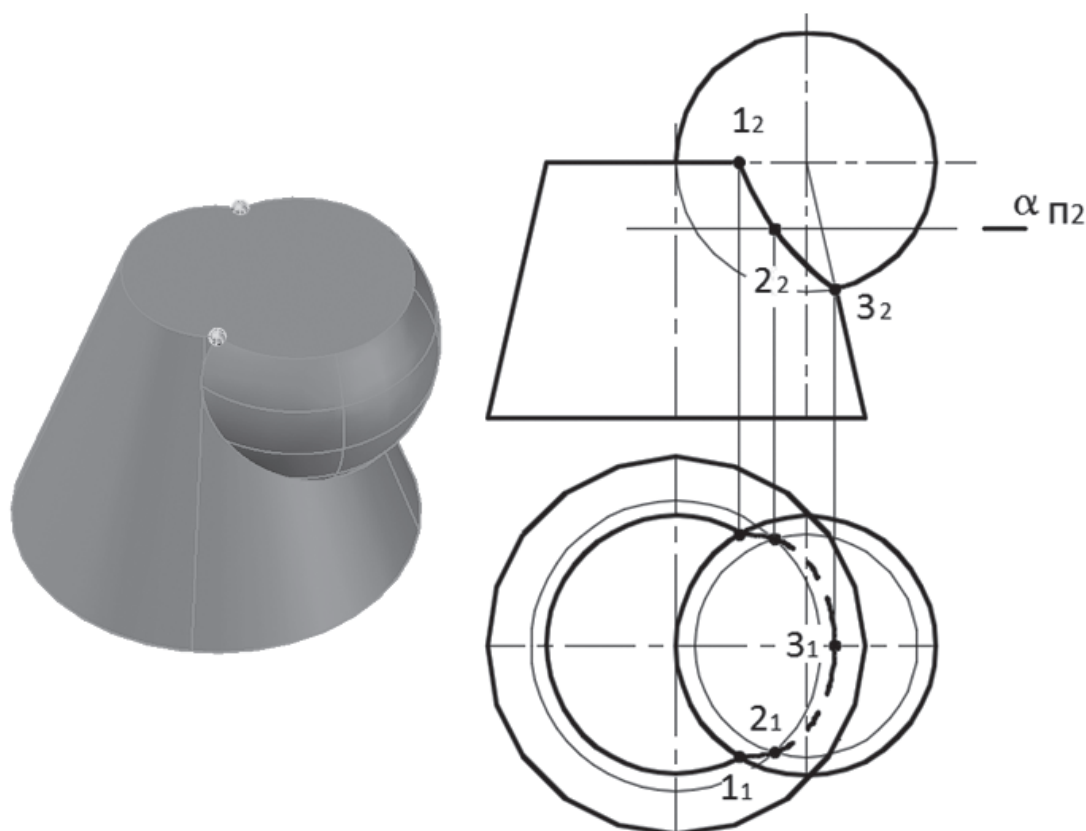


Рис. 34. Линия пересечения конуса с недоступной вершиной и сферы

Линия пересечения конуса и сферы пересекается с боковыми сторонами и диагоналями трапеций, аппроксимирующих поверхность конуса, в точках 6, А, В, С, D (рис. 35).

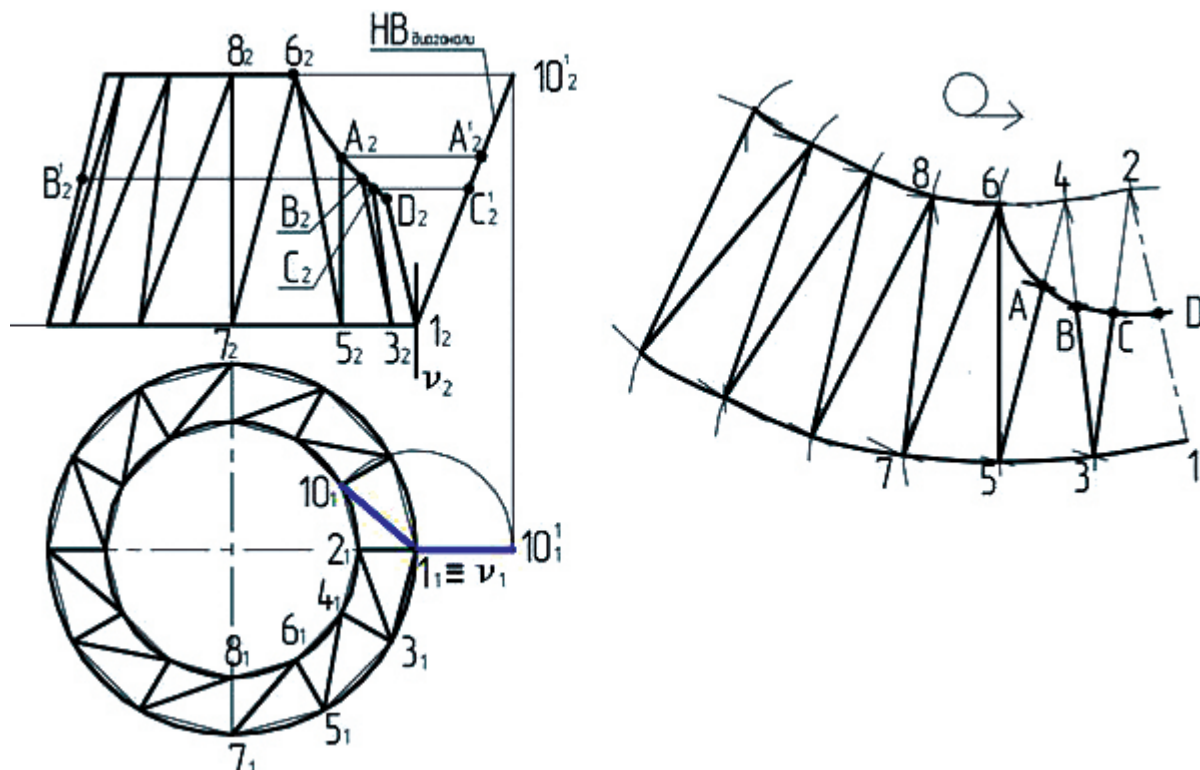


Рис. 35. Конус с недоступной вершиной с линией пересечения поверхностей

Все образующие конуса — боковые стороны трапеций — имеют одинаковую величину, но в натуральную величину проецируются только крайняя левая и крайняя правая (1–2) образующие. Все диагонали трапеций имеют одинаковую величину, их натуральная величина равна отрезку $1_2-10_2^1$. На развертке откладывается натуральная величина длины боковой стороны и диагонали трапеции, от нижнего основания конуса до точек на линии пересечения: для точки D расстояние 1_2D_2 , для точки C расстояние $1_2C_2^1$, для точки B расстояние от нижнего основания конуса до B_2^1 , для точки A расстояние $1_2A_2^1$. Построенные точки соединяются плавной кривой линией (рис. 35).

Построение разверток поверхностей имеет широкое практическое применение, особенно при проектировании систем отопления, кондиционирования и вентиляции. Например, вытяжка на кухне с воздуховодом будет обязательным компонентом, обеспечивающим своевременный отток запахов приготовляемой пищи.

Кухонная вытяжка-переходник (рис. 36), в верхней части которой находится круг, а в нижней — прямоугольник 70×60 , состоит из нескольких элементов: четырех плоскостей в форме треугольников и четырех частей, похожих по форме на четверть наклонного конуса с вершинами в углах прямоугольника (рис. 36).

Для построения развертки четырех частей наклонных конусов А–1–10, В–1–4, С–4–7, D–7–10 каждая часть аппроксимируется четвертью наклонной вписанной 12-гранной пирамидой с вершинами в точках А, В, С, D (рис. 37). В результате аппроксимации поверхность переходника будет состоять из 16 треугольников (рис. 37). Фигура переходника симметрична, поэтому А–1=В–1=С–7=D–7, В–4=С–4=А–10=D–10, А–12=В–2=С–6=D–8, А–11=В–3=С–5=D–9.

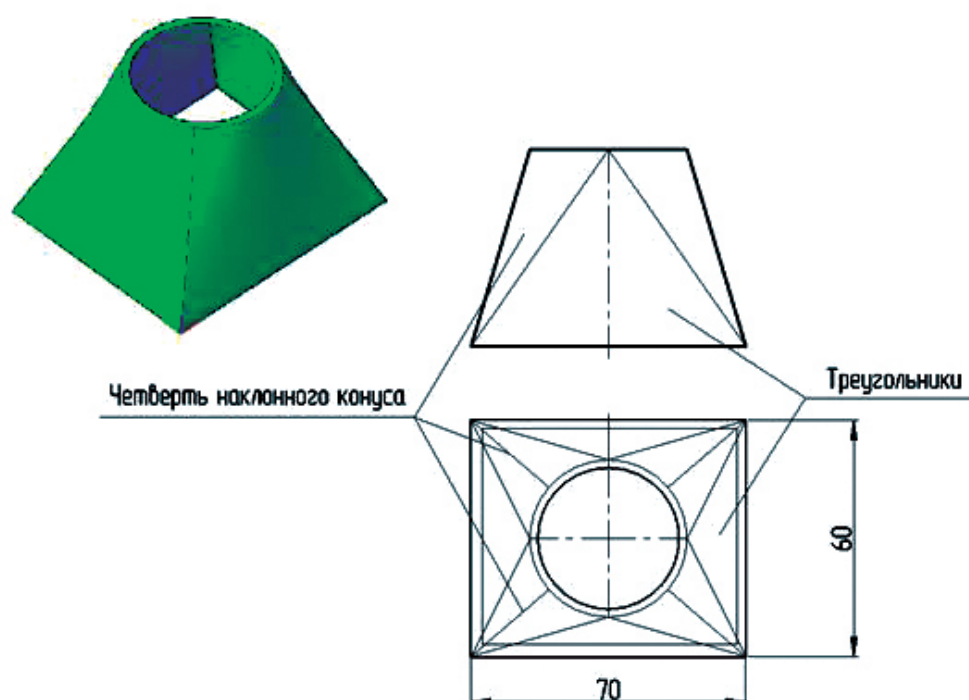


Рис. 36. Переходник-вытяжка. 3D-модель и ортогональные проекции

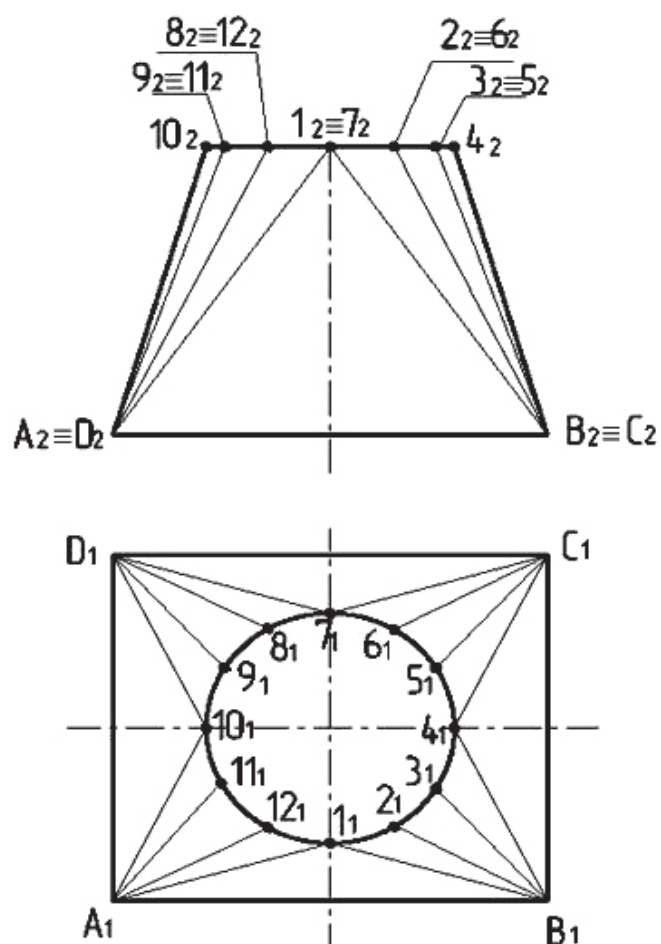


Рис. 37. Аппроксимация переходника

Вследствие симметричности переходника, достаточно определить натуральные величины сторон B_1, B_2, B_3, B_4 . Натуральные величины перечисленных сторон треугольников определяются способом вращения вокруг оси перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций i . Через вершину прямоугольника B проводится ось вращения i . Стороны B_1, B_2, B_3, B_4 вращаются до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций. При этом горизонтальные проекции отрезков вращаются по окружностям с радиусами B_1, B_2, B_3, B_4 до положения, параллельного оси OX (рис. 38).

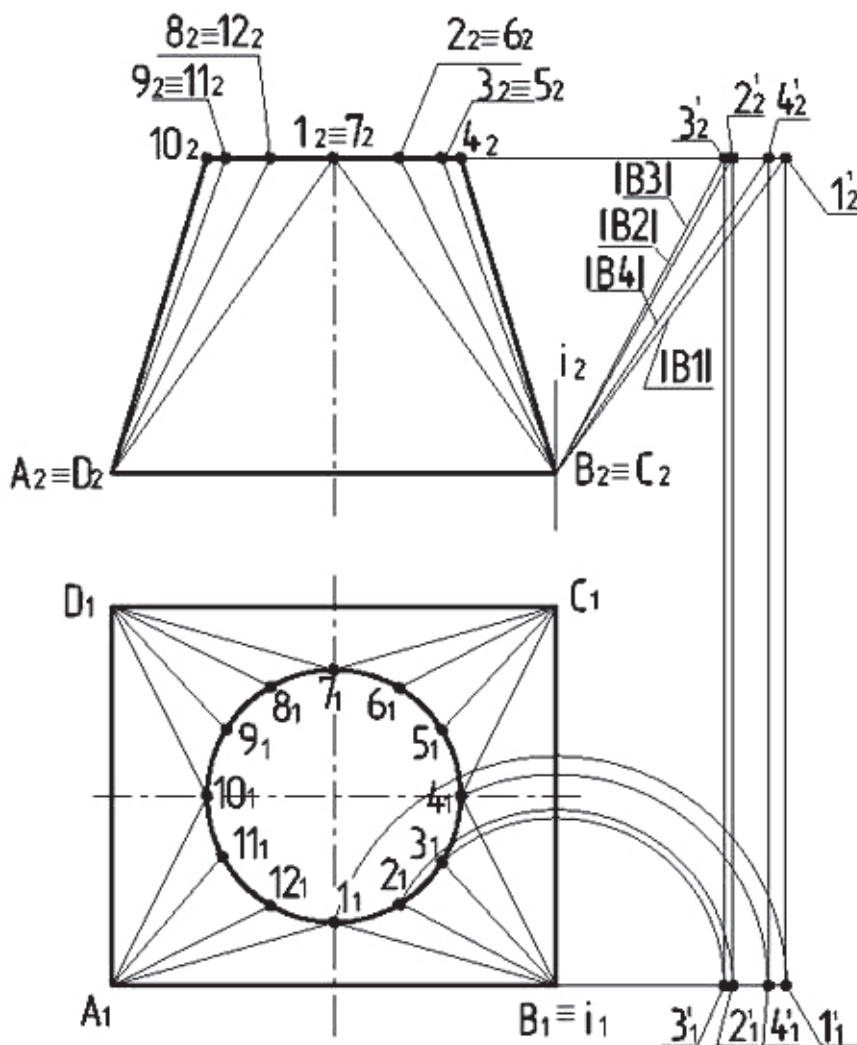


Рис. 38. Определение натуральных величин сторон треугольников

Фронтальные проекции точек 1, 2, 3, 4 перемещаются по окружностям в горизонтальной плоскости уровня до положения $1'_2, 2'_2, 3'_2, 4'_2$. Натуральная величина сторон треугольников B_1, B_2, B_3, B_4 показана на рис. 38 — это отрезки IB_1, IB_2, IB_3, IB_4 .

Развертка переходника строится способом триангуляции, аналогично конусу с недоступной вершиной, рассмотренному в предыдущем примере. Каждая следующая точка строится на пересечении двух дуг (рис. 39), которые проводятся из уже построенных точек. Расстояния между точками 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5 и т.д. равны, а величина их равна хорде, которая получается от деления окружности верхнего основания на двенадцать равных частей.

Построение развертки начинается с построения треугольника $AB1$ (рис. 39). Натуральная величина стороны треугольника AB равна его горизонтальной проекции $AB = |A_1 B_1|$. Для построения на развертке точки 1 из точек A и B проводятся дуги радиусом, равным натуральной величине отрезка $|B1| = |B_2 1_2|$. Далее на развертке строится точка 2 — на пересечении дуги радиусом, равным хорде $|1-2| = |1_1 2_1|$, и дуги, радиус которой равен натуральной величине отрезка $|B2| = |B_2 2_2|$. Точка 12 симметрична точке 2 и строится аналогично.

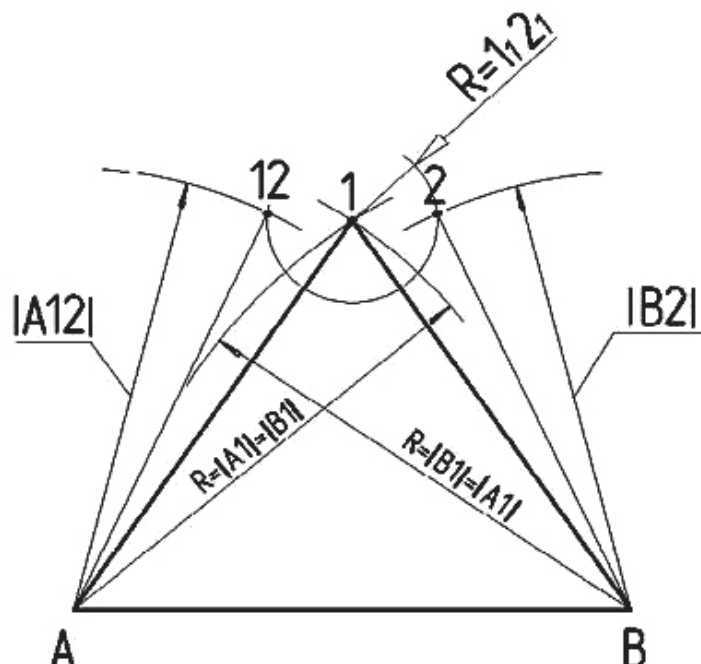


Рис. 39. Построение на развертке переходника точек 1, 2, 12

Точка 3 (рис. 40) — результат пересечения двух дуг: хорды $2-3 = |2_1-3_1|$ и $|B3| = |B_2 3_2|$. Точка 11 на развертке располагается симметрично точке 3 и строится аналогично.

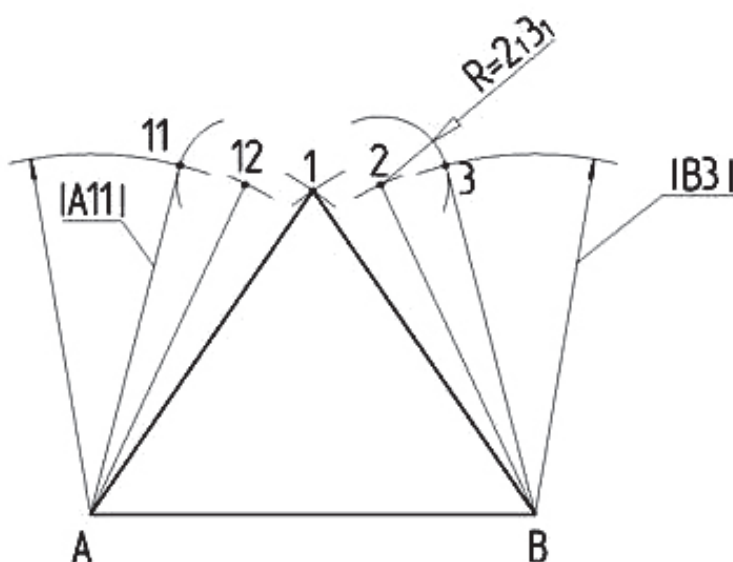


Рис. 40. Построение на развертке точек 3 и 11

Точка 4 (рис. 41) — результат пересечения дуги, равной хорде $3-4 = l_{3,4}^1$, и дуги, равной $l_{B4} = l_{B_2,4_2}^1$. Треугольник $B4C$ строится так: из точки B на развертке проводится дуга радиусом $l_{B_1C_1}^1$, из точки 4 — дуга, равная натуральной величине отрезка $l_{4C} = l_{B4}$. Все последующие построения выполняются аналогично. Развертка переходника показана на рис. 41. Допускается строить только половину развертки.

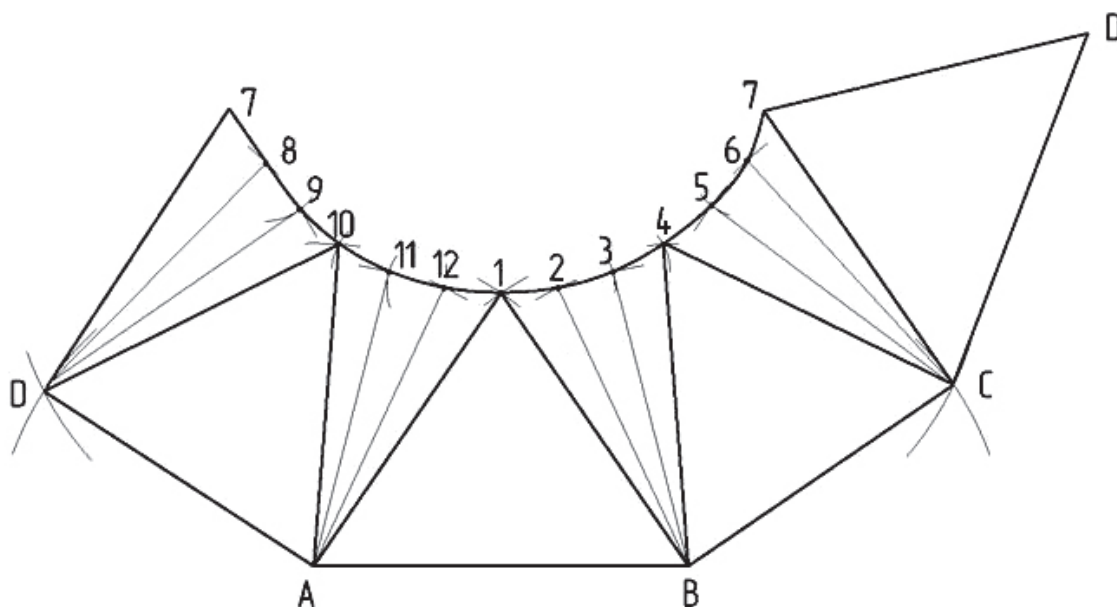


Рис. 41. Развертка переходника

Пример 11. Построение развертки способом раскатки.

Способ раскатки используется для построения развертки наклонного эллиптического цилиндра, сечение плоскостью перпендикулярной оси вращения этой поверхности имеет форму эллипса (рис. 42). Поверхность наклонного эллиптического цилиндра аппроксимируется поверхностью наклонной 12-гранной призмы. Для этого в круговое основание цилиндра вписывается правильный 12-угольник $1-2-3-4-5-...12$ (рис. 42).

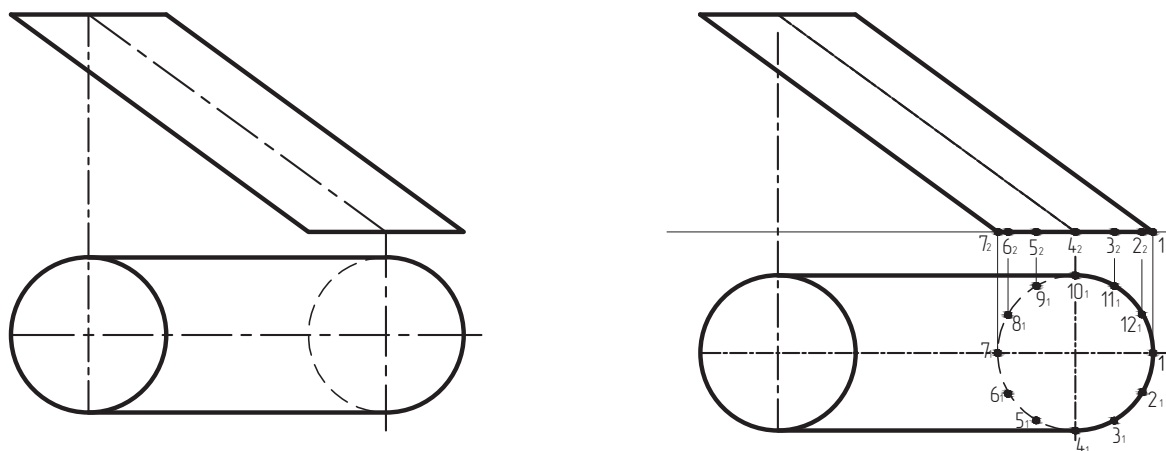


Рис. 42. Наклонный эллиптический цилиндр и аппроксимация кругового основания цилиндра двенадцати угольником

Через вершины двенадцати угольника проводятся ребра призмы (рис. 43), аппроксимирующей поверхность цилиндра $1-1^1, 2-2^1, 3-3^1...12-12^1$. Вся боковая поверхность на-

клонного эллиптического цилиндра аппроксимируется двенадцатью параллелограммами $1_1 2_1 2_1' 1_1'$, $2_1 3_1 3_1' 2_1'$ и т.д. При построении развертки способом раскатки грани призмы, имеющие форму параллелограммов, поворачиваются вокруг оси вращения до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций. Все точки граней призмы движутся по окружностям, которые располагаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения i . Ось вращения i проводится через крайнюю правую образующую цилиндра $1-1'$. Все точки на развертке будут удалены друг от друга на величину хорды $1_1-2_1 = 2_1-3_1 = \dots = 12_1-1_1$.

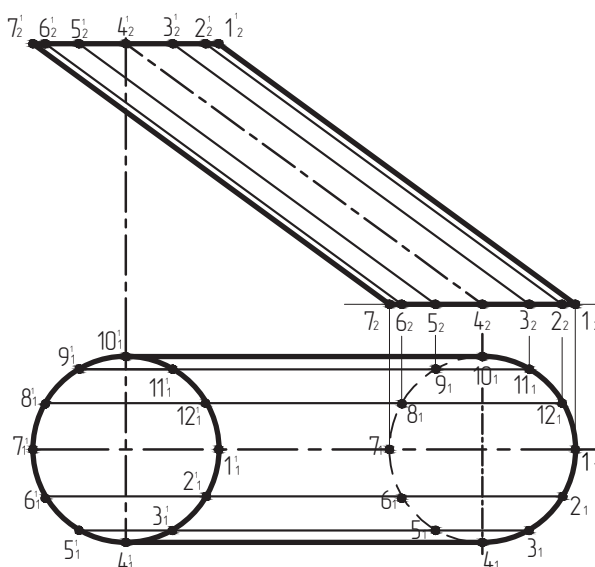


Рис. 43. Аппроксимация поверхности наклонного эллиптического цилиндра поверхностью наклонной призмы

Положение точки на развертке определяется на пересечении дуги, равной хорде $1_1 2_1$ и т.д., и перпендикуляра к оси вращения из фронтальной проекции точки. Например: положение точки 2 на развертке (рис. 44) определяется на пересечении дуги, проведенной из точки 1_2 радиусом $R = 1_1 2_1$, и перпендикуляра к оси i , проведенного из точки 2_2 .

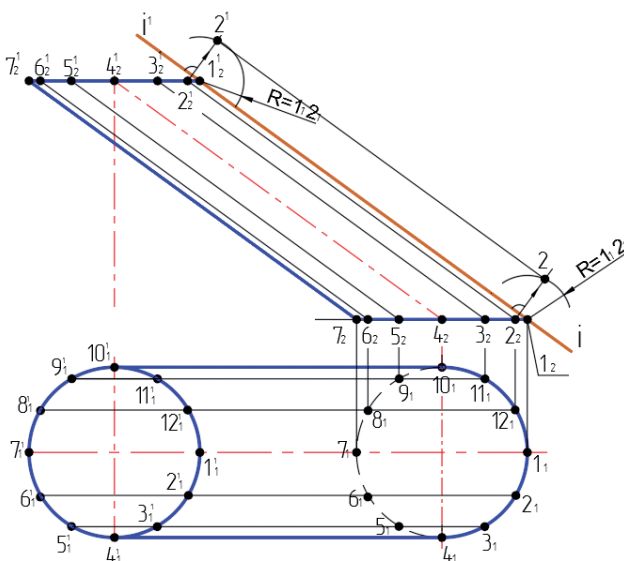


Рис. 44. Построение на развертке точки 2 и $2'$

Точки верхней части развертки строятся аналогично. Построенные на развертке точки 2 и 2¹ соединяются прямой линией.

Точка 3 на развертке определяется на пересечении дуги радиусом $R = 2_1 3_1$, проведенной из точки 2 развертки, и перпендикуляра, проведенного из точки 3₂ к оси вращения i . Точка 4 на развертке определяется на пересечении дуги радиусом $R = 3_1 4_1$, проведенной из точки 3 развертки, и перпендикуляра, проведенного из точки 4₂ к оси вращения i и т. д. Дальнейшие построения выполняются аналогично описанным. Полностью построенная развертка представлена на рис. 45. Обращаем ваше внимание на симметричность фигуры развертки, осью симметрии является образующая 7–7¹.

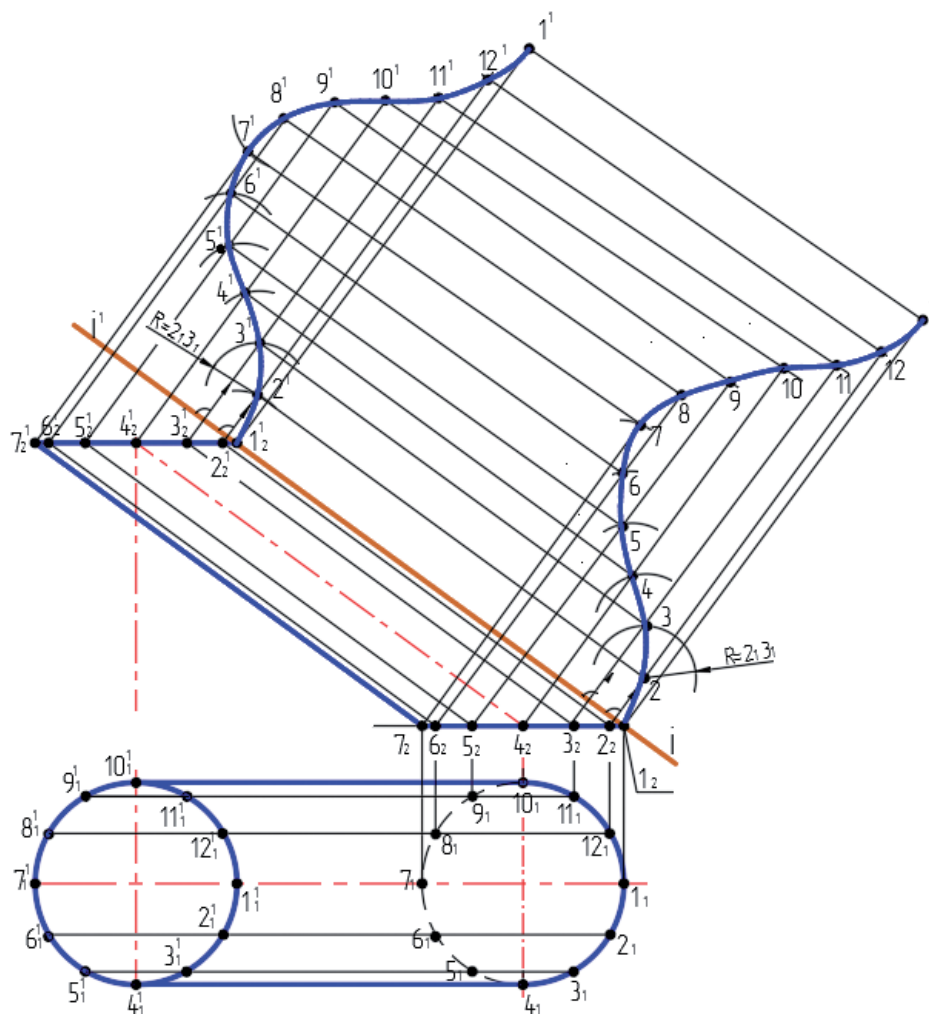


Рис. 45. Развертка цилиндра наклонного эллиптического способом раскатки

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сколько основных плоскостей проекций на ортогональном чертеже?
2. В чем основное отличие многогранника от поверхности вращения второго порядка?
3. Определите сущность способа вспомогательных секущих плоскостей.
4. Как называется объект пространства, получающийся при пересечении поверхности и плоскости?
5. Какая плоскость называется проецирующей? Определите ее свойства.
6. Какая плоскость является плоскостью уровня? Определите ее свойства.
7. Сформулируйте понятие «сечение поверхности».
8. Каким образом на эпюре обозначают секущую плоскость?
9. Какие геометрические фигуры могут быть получены при сечении цилиндра проецирующими плоскостями?
10. Какие геометрические фигуры могут быть получены при сечении конуса плоскостями уровня?
11. Какие геометрические фигуры могут быть получены при сечении конуса проецирующими плоскостями?
12. Какие способы применяют для определения натуральной величины фигуры сечения поверхности проецирующей плоскостью?
13. Какая форма бывает у сечений поверхностей при решении задач способом секущих плоскостей?
14. Какую форму имеют сечения по сферической поверхности?
15. Какую форму имеют сечения по конической поверхности?
16. Какую форму имеют сечения по цилиндрической поверхности?
17. Какие способы построения линий пересечения поверхностей вам известны?
18. Где располагаются характерные точки линии пересечения поверхностей при решении задач способом вспомогательных секущих плоскостей?

19. Сформулируйте понятие «проецирующая поверхность». Какими признаками она должна обладать?
20. Определите условия, при которых задачу можно решать способом концентрических сфер.
21. Как определить величину минимальной сферы (способ концентрических сфер)?
22. Как определить центр вспомогательных сфер (способ концентрических сфер)?
23. Где располагаются характерные точки линии пересечения поверхностей при решении задач способом концентрических сфер?
24. Определите формулу расчета длины окружности при построении развертки прямого кругового цилиндра.
25. Как изображается точная развертка прямого кругового цилиндра?
26. Как изображается точная развертка прямого кругового конуса?
27. Что называется разверткой поверхности?
28. В чем основное отличие поверхностей развертываемых и неразвертываемых?
29. Сформулируйте определение понятия «аппроксимация поверхности».
30. Определите последовательность выполнения аппроксимации.
31. Какой поверхностью аппроксимируют поверхность конуса прямого кругового?
32. Какой поверхностью аппроксимируют поверхность цилиндра прямого кругового?
33. Каким символом на чертеже обозначают развертку поверхности?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Начертательная геометрия : учеб. для студентов строит. специальностей вузов / [Н. Н. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, В. Е. Васильев] ; под ред. Н. Н. Крылова. Изд. 11-е, стер. Москва : Высшая школа, 2010. 224 с.
2. Коров Ю. И. Начертательная геометрия : учебник для студентов архитектур. специальностей вузов / Ю. И. Коров. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Архитектура-С, 2007. 424 с.
3. Коров Ю. И. Начертательная геометрия: учебник для студентов вузов, обучающихся по курсу «Начертат. геометрия» в техн. вузах / Ю. И. Коров. Москва ; Санкт-Петербург; Нижний Новгород [и др.] : Питер, 2007. 252 с.

Методическая литература

4. Начертательная геометрия: задачник / Т. И. Кириллова, Л. Ю. Елькина, Л. Ю. Стриганова, Л. В. Соловьева-Гоголева. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. 28 с.
5. Кириллова Т. И. Начертательная геометрия. Метрические и позиционные задачи : учеб.-метод. указания к курсовой работе по начертательной геометрии для студентов всех форм обучения направления 270800.62 «Строительство» / Т. И. Кириллова, Л. Ю. Елькина ; науч. ред. Н. Х. Понетаева. Екатеринбург : УрФУ, 2012. 55 с.
6. Понетаева Н. Х. Начертательная геометрия в примерах и задачах: учеб. пособие / Н. Х. Понетаева, Н. В. Патрушева ; науч. ред. Н. Х. Понетаева. Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2008. 116 с.

Электронные образовательные ресурсы

7. Стриганова Л. Ю. Относительное положение геометрических объектов [Электронный ресурс] // Образовательный портал УрФУ. 2014. Режим доступа: http://study.ustu.ru/view/aid_view.aspx?AidId=133. Загл. с экрана.

8. Стриганова Л. Ю. Начертательная геометрия и инженерная графика [Электронный ресурс] // Образовательный портал УрФУ. 2014. Режим доступа: http://study.ustu.ru/umk/umk_view.aspx?id=8314. Загл. с экрана.

9. Стриганова Л. Ю. Ортогональные проекции плоскости [Электронный ресурс] // Образовательный портал УрФУ. 2014. Режим доступа: http://study.ustu.ru/view/aid_view.aspx?AidId=1072010. Загл. с экрана.

10. Стриганова Л. Ю. Способы преобразования проекций [Электронный ресурс] // Образовательный портал УрФУ. 2014. Режим доступа: http://study.ustu.ru/view/aid_view.aspx?AidId=10721. Загл. с экрана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Расчетно-графическая работа «Относительное положение плоскости и поверхности»

Задача 1. Построить три проекции сечения комбинированной поверхности плоскостью α .

Алгоритм выполнения:

1. Начертить по исходным данным, приведенным далее, две проекции комбинированной поверхности и следы секущей плоскости α на формате А3. Положение секущей плоскости α задать самостоятельно, подобно изображению в задании.
2. Построить третью проекцию комбинированной поверхности.
3. Определить вид линии сечения каждой поверхности заданной фронтально-проецирующей плоскостью α (табл. 1, 2, 3, 4).
4. Определить характерные точки линии сечения.
5. Построить горизонтальную проекцию линий сечения каждой простой поверхности проецирующей плоскостью α .
6. Построить профильную проекцию линий сечения каждой простой поверхности проецирующей плоскостью α .
7. Обвести изображения с учетом видимости.
8. Проставить заданные размеры.

Задача 2. Определить натуральную величину сечения комбинированной поверхности плоскостью α .

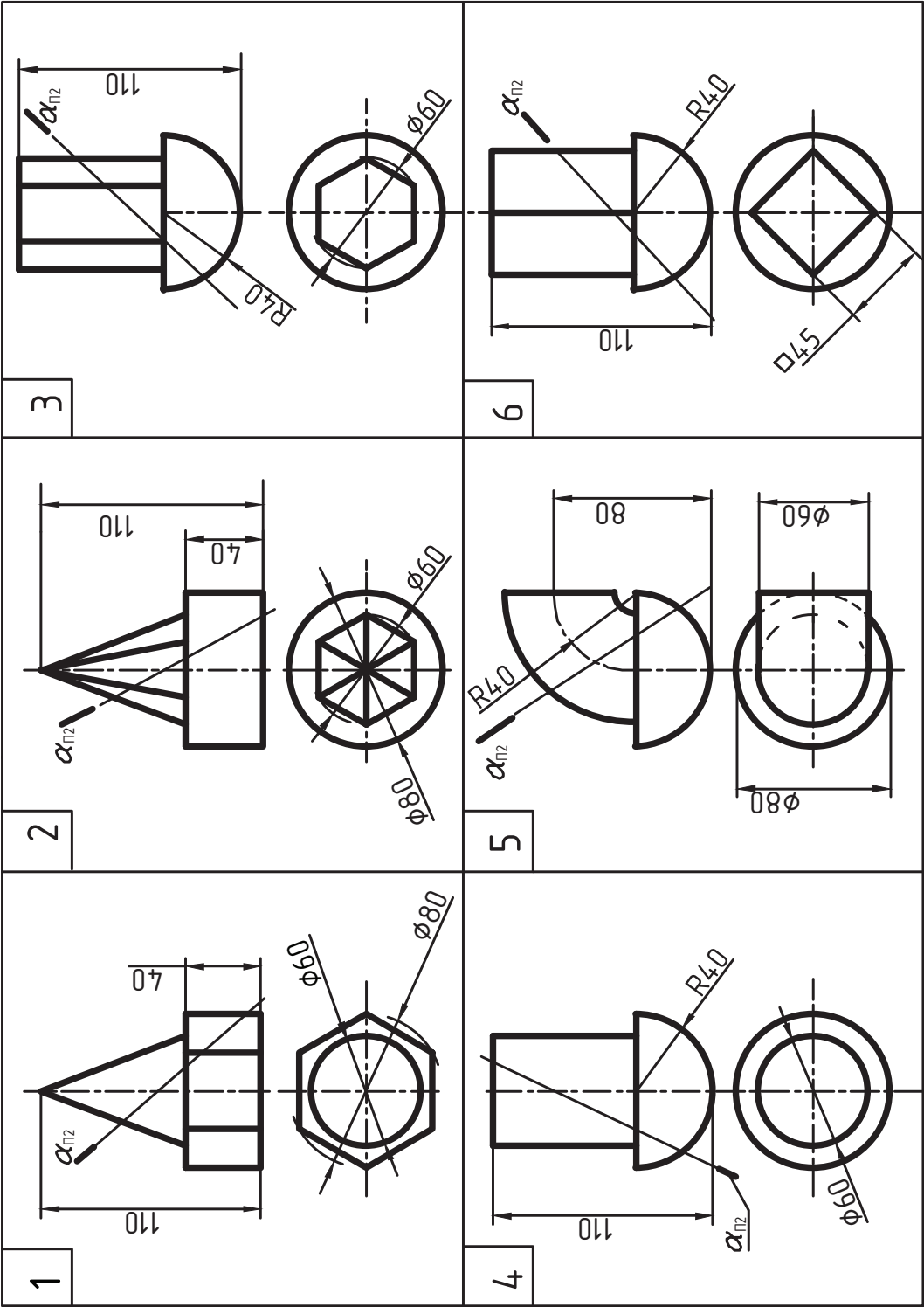
Алгоритм выполнения:

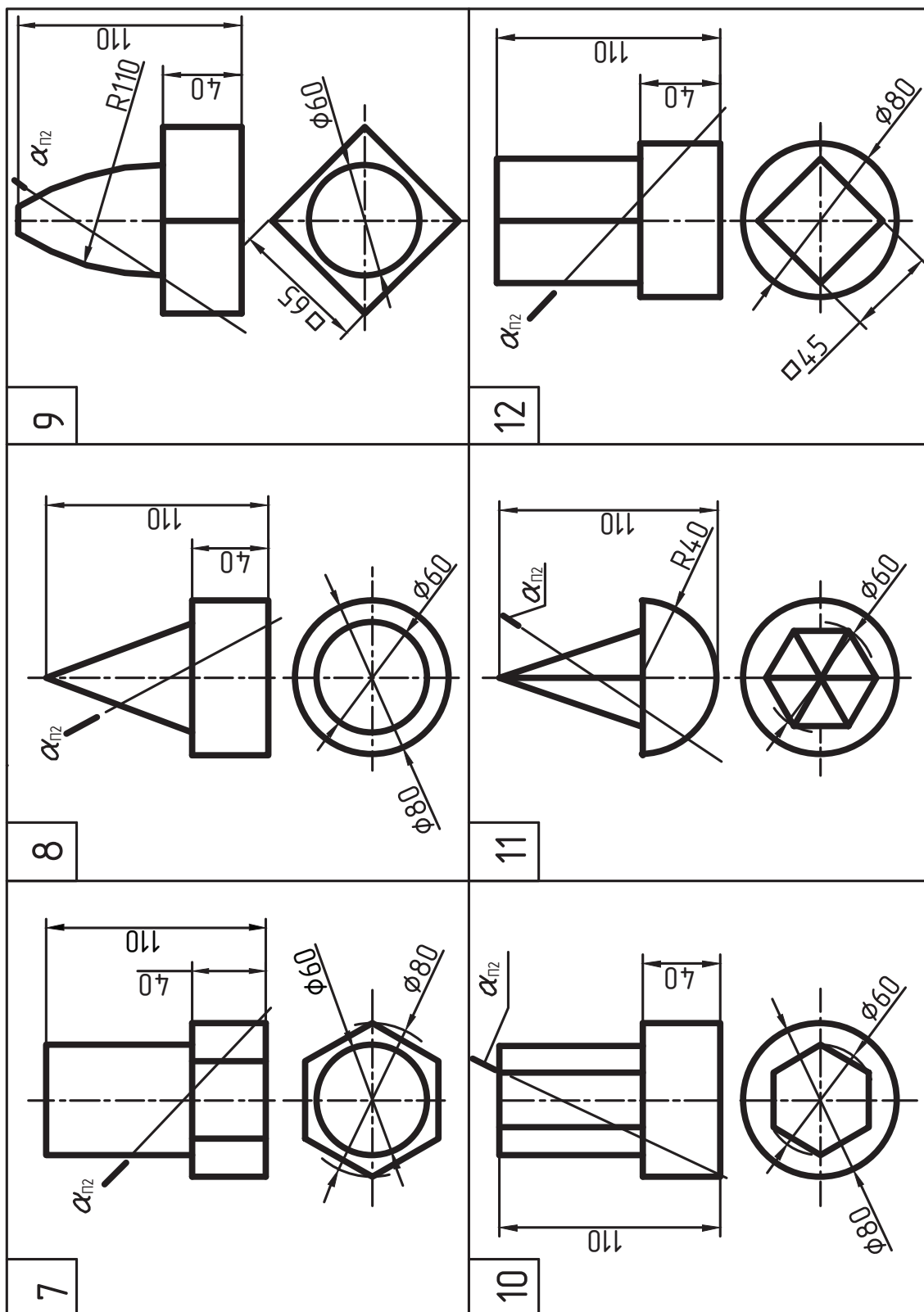
1. Определить натуральную величину сечения комбинированной поверхности плоскостью α , используя способ плоско-параллельного перемещения.
2. Натуральную величину сечения заштриховать тонкими линиями под углом 45° к основной надписи. Расстояние между линиями штриховки — 5 мм.

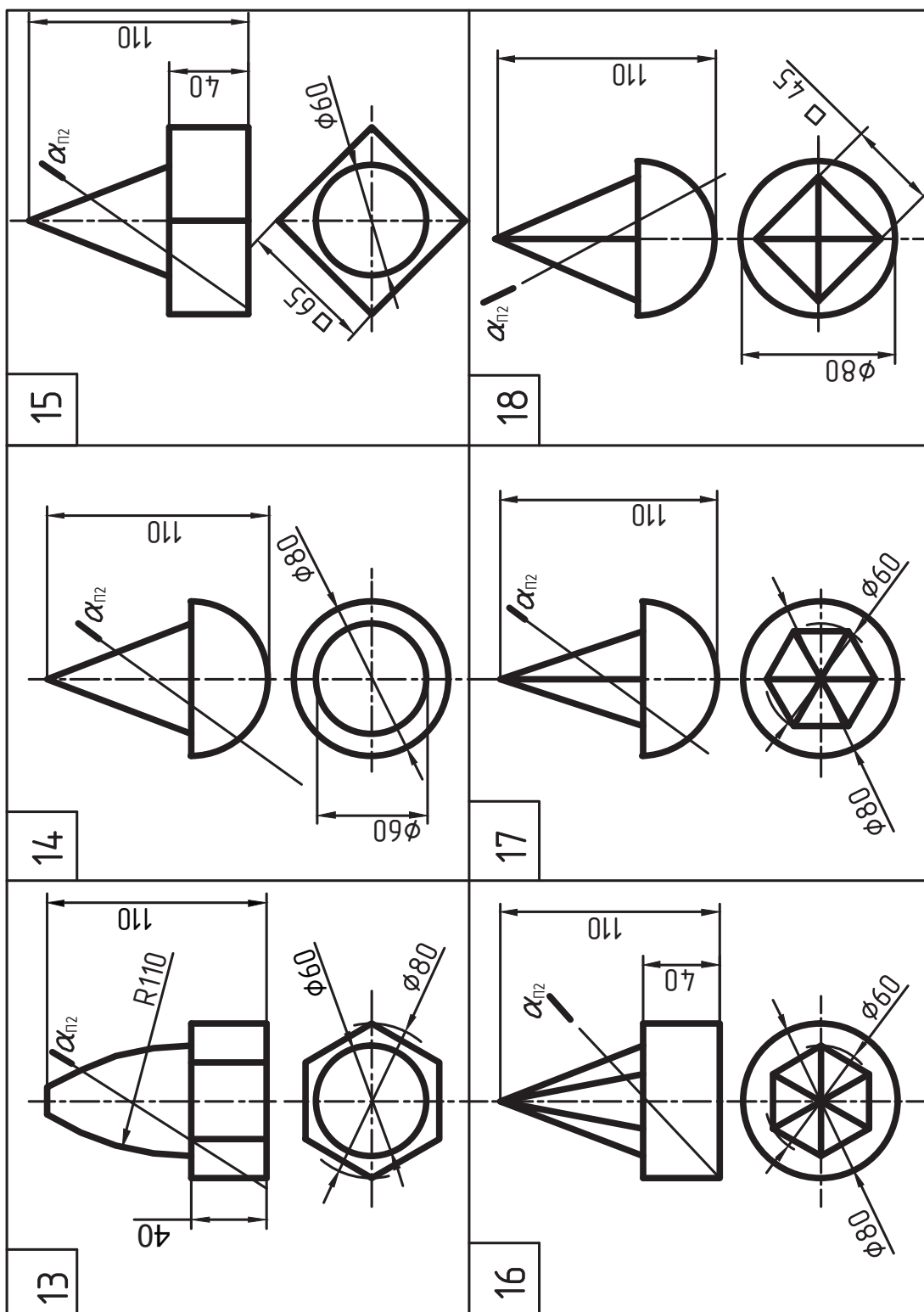
Задачи выполняются на формате А3, основная надпись по форме 1 (рис. П.4.3). Индивидуальные варианты расчетно-графической работы представлены ниже. Линии построений проекций точек и вспомогательные линии связи на чертеже не стирать.

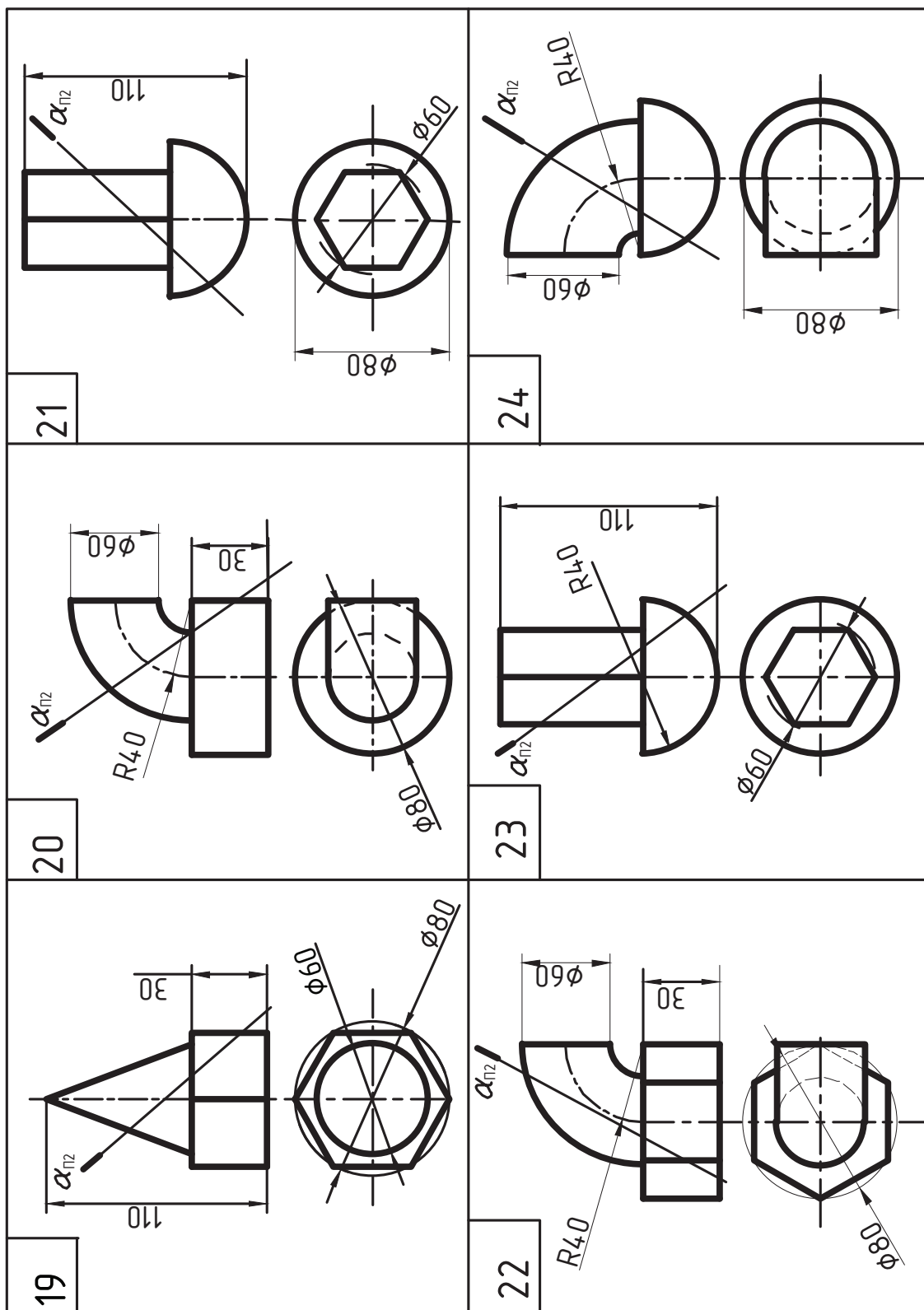
Пример выполнения первого задания расчетно-графической работы приведен на рис. П.1.

Индивидуальные варианты расчетно-графической работы
«Относительное положение плоскости и поверхности»









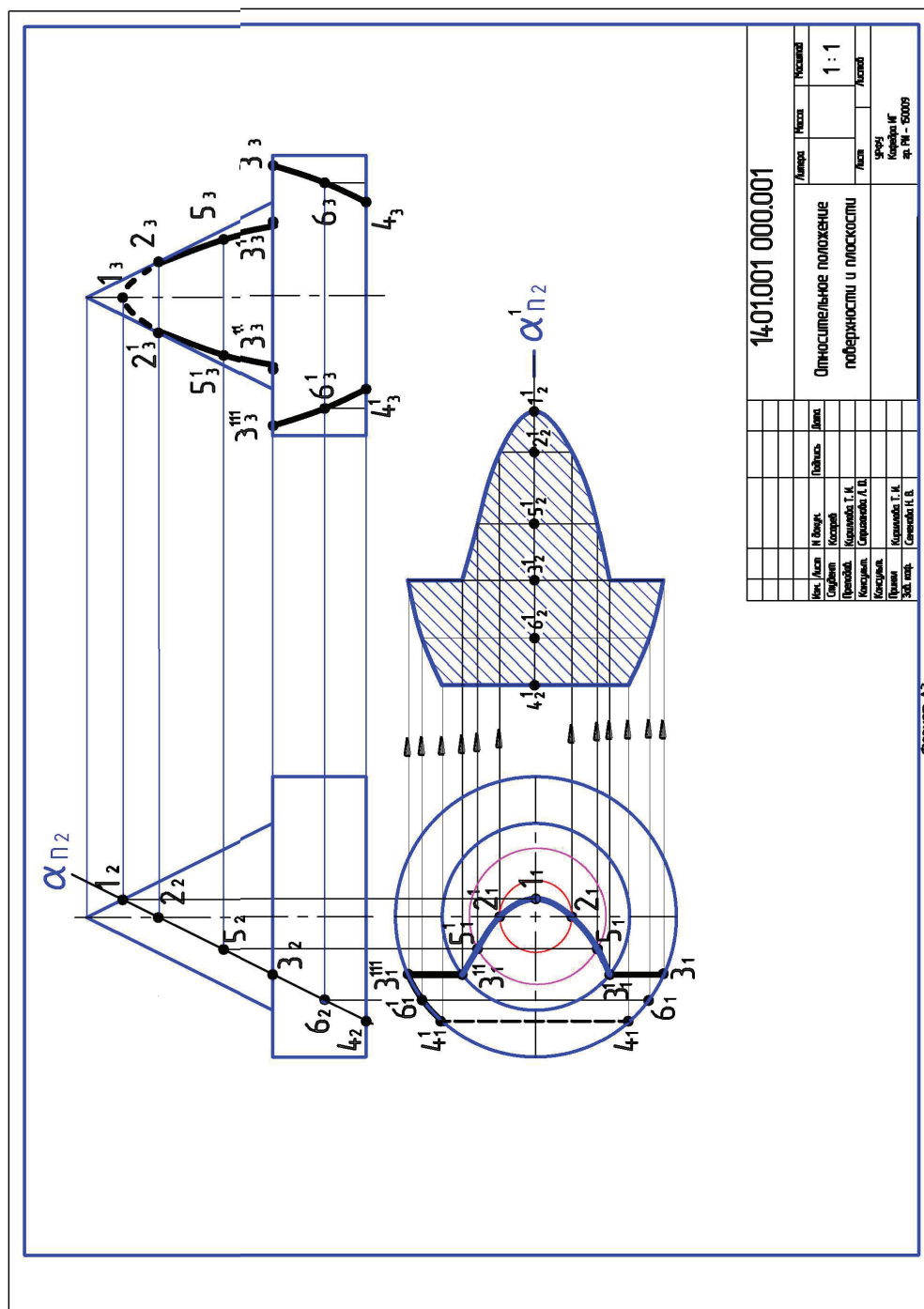


Рис. П.1. Пример выполнения расчетно-графической работы
«Относительное положение поверхности и плоскости»

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Расчетно-графическая работа «Относительное положение поверхностей. Способ вспомогательных секущих плоскостей»

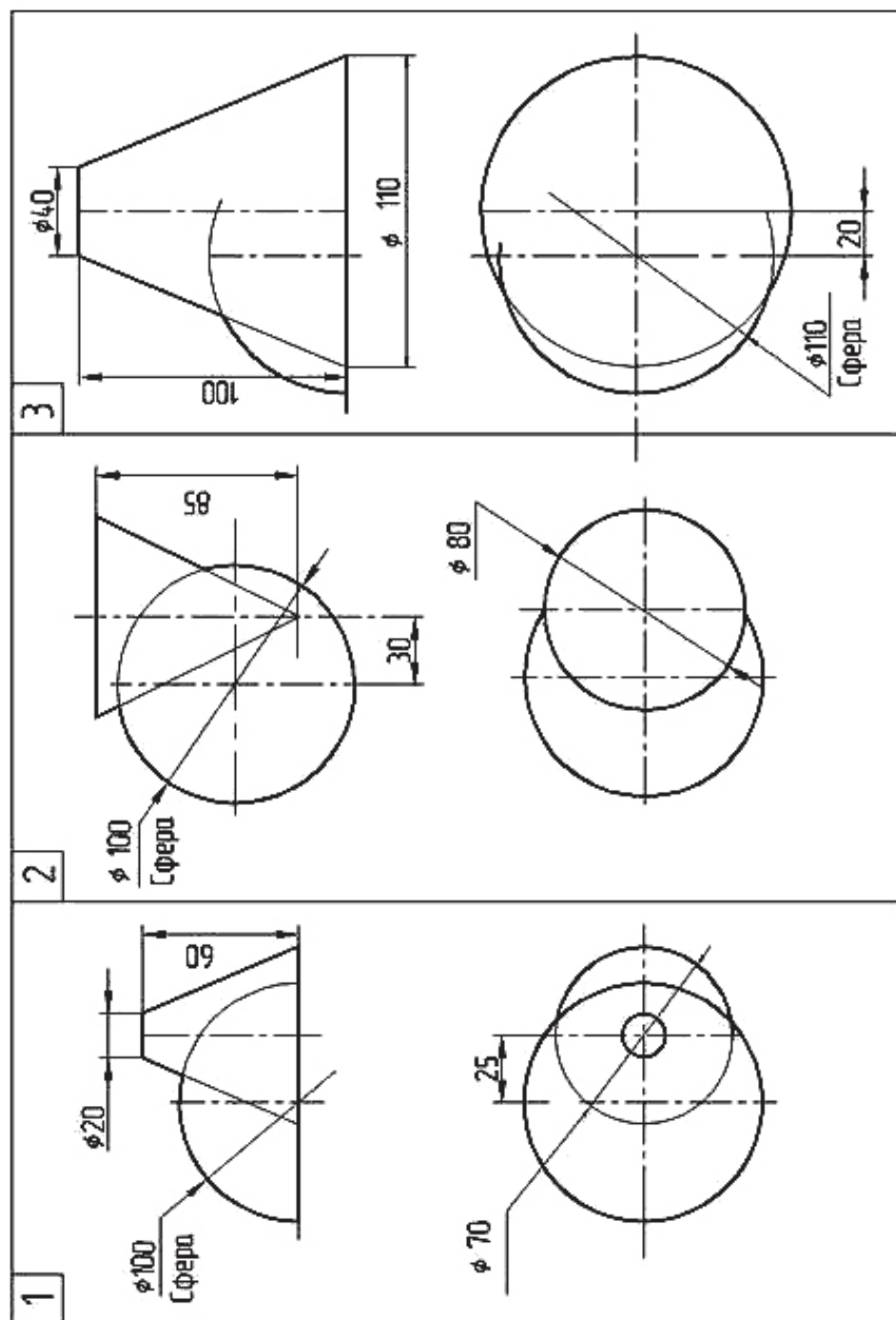
Задача. Построить три проекции заданных поверхностей и линию их пересечения, используя способ вспомогательных секущих плоскостей.

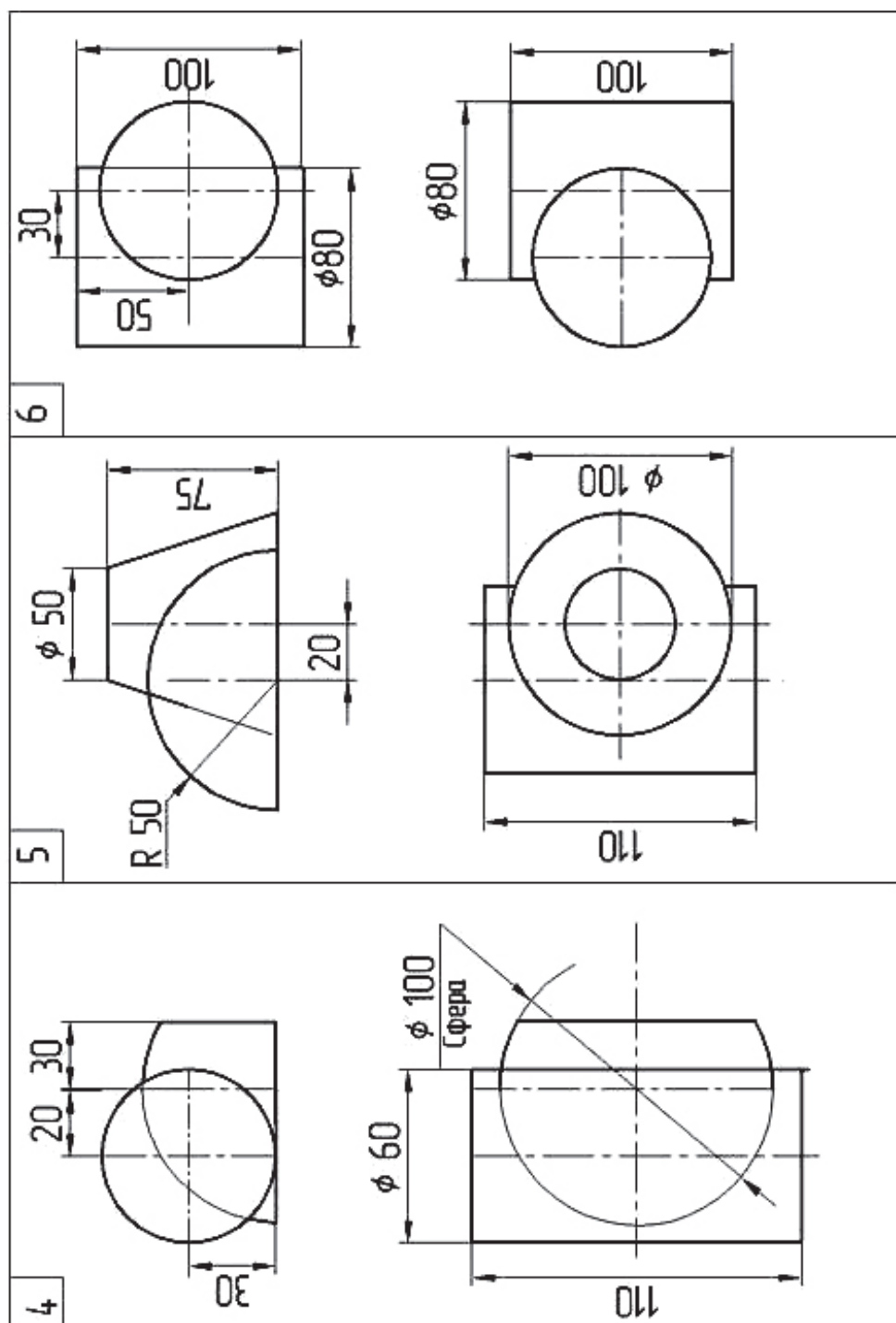
Алгоритм выполнения:

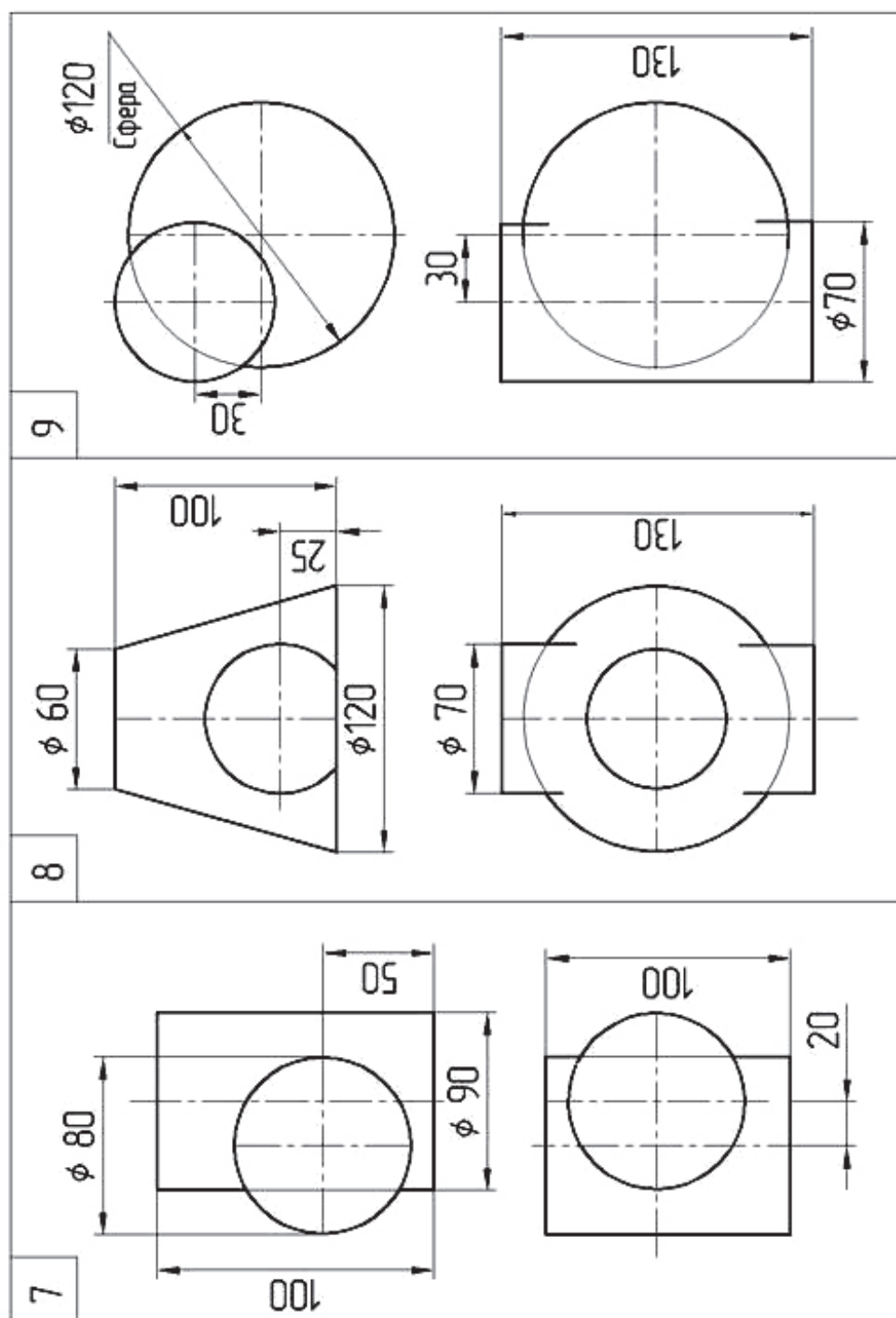
1. Начертить по исходным данным, приведенным далее, две проекции заданных поверхностей.
2. Построить профильную проекцию заданных поверхностей.
3. Определить проецирующие поверхности.
4. Определить все характерные точки линий пересечения.
5. Построить проекции линий пересечения поверхностей, используя способ вспомогательных секущих плоскостей
6. Определить видимость линий пересечения поверхностей и очерковых линий поверхностей.

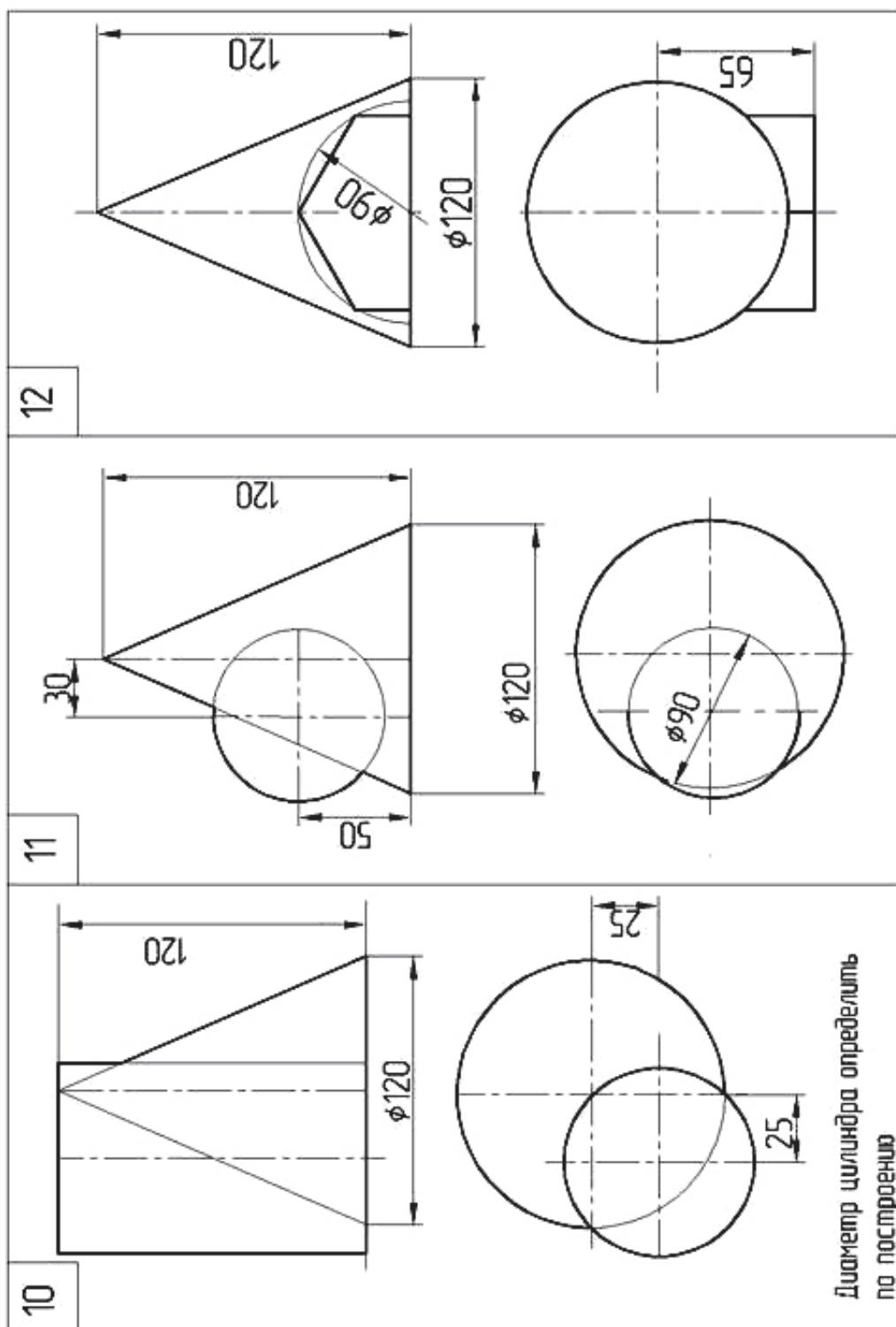
Задание данной расчетно-графической работы выполняется на формате А3, основная надпись по форме 1 (рис. П.4.3). Индивидуальные задания приведены ниже. Пример выполнения расчетно-графической работы приведен на рис. П.2. Линии построений и вспомогательные линии связи на чертеже не стирать.

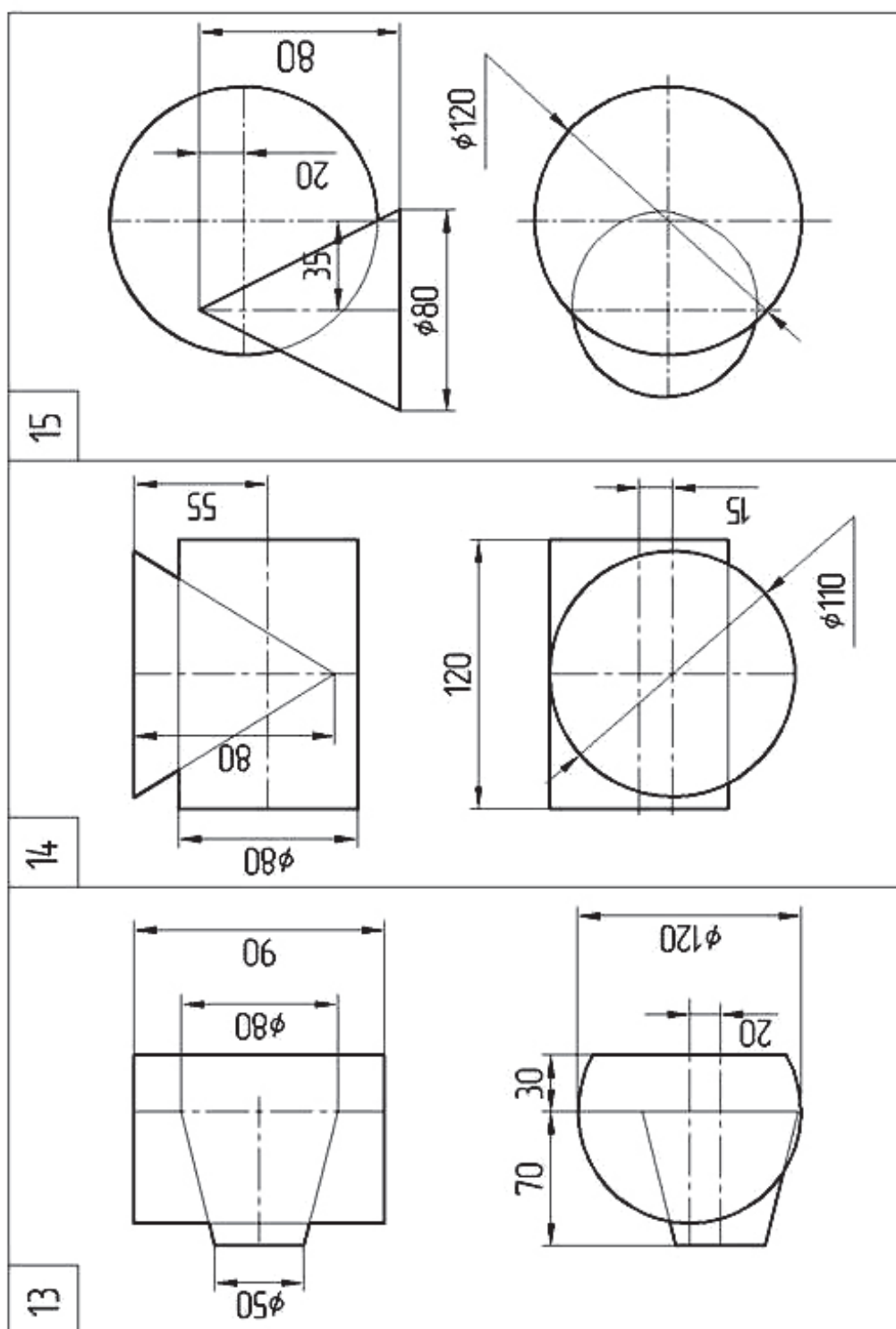
Индивидуальные варианты расчетно-графической работы
«Относительное положение поверхностей. Способ вспомогательных секущих плоскостей»

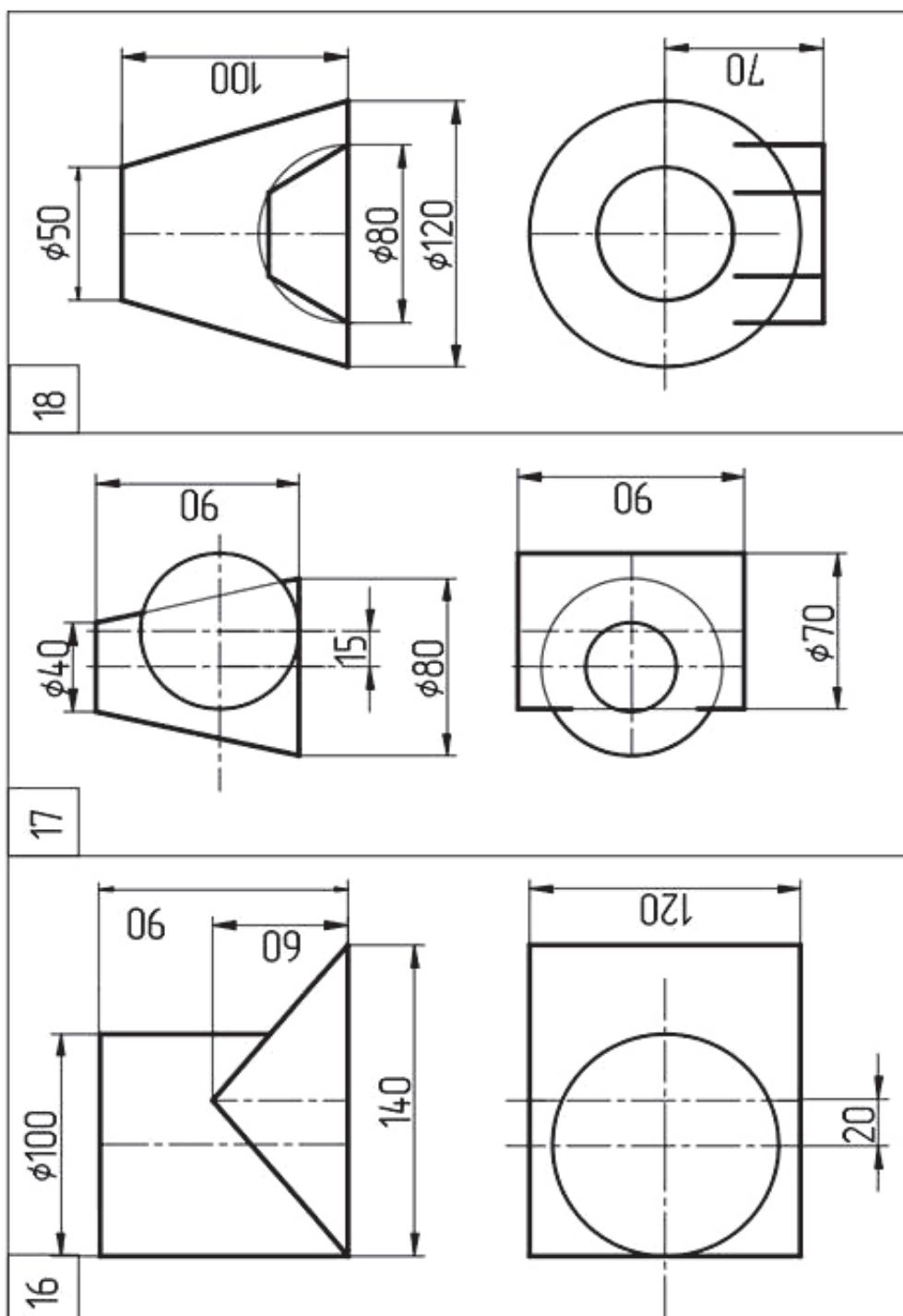


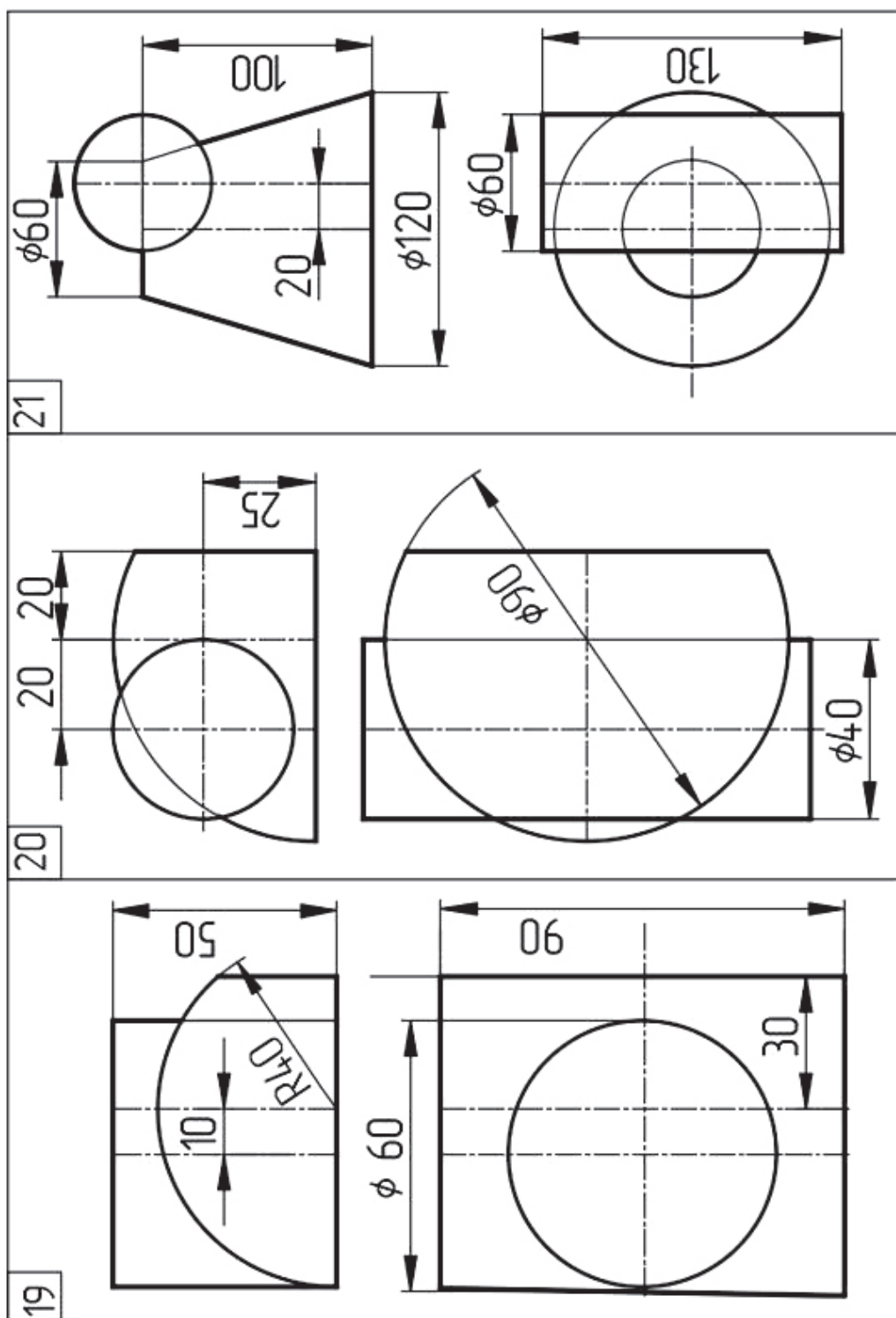












24	
23	
22	

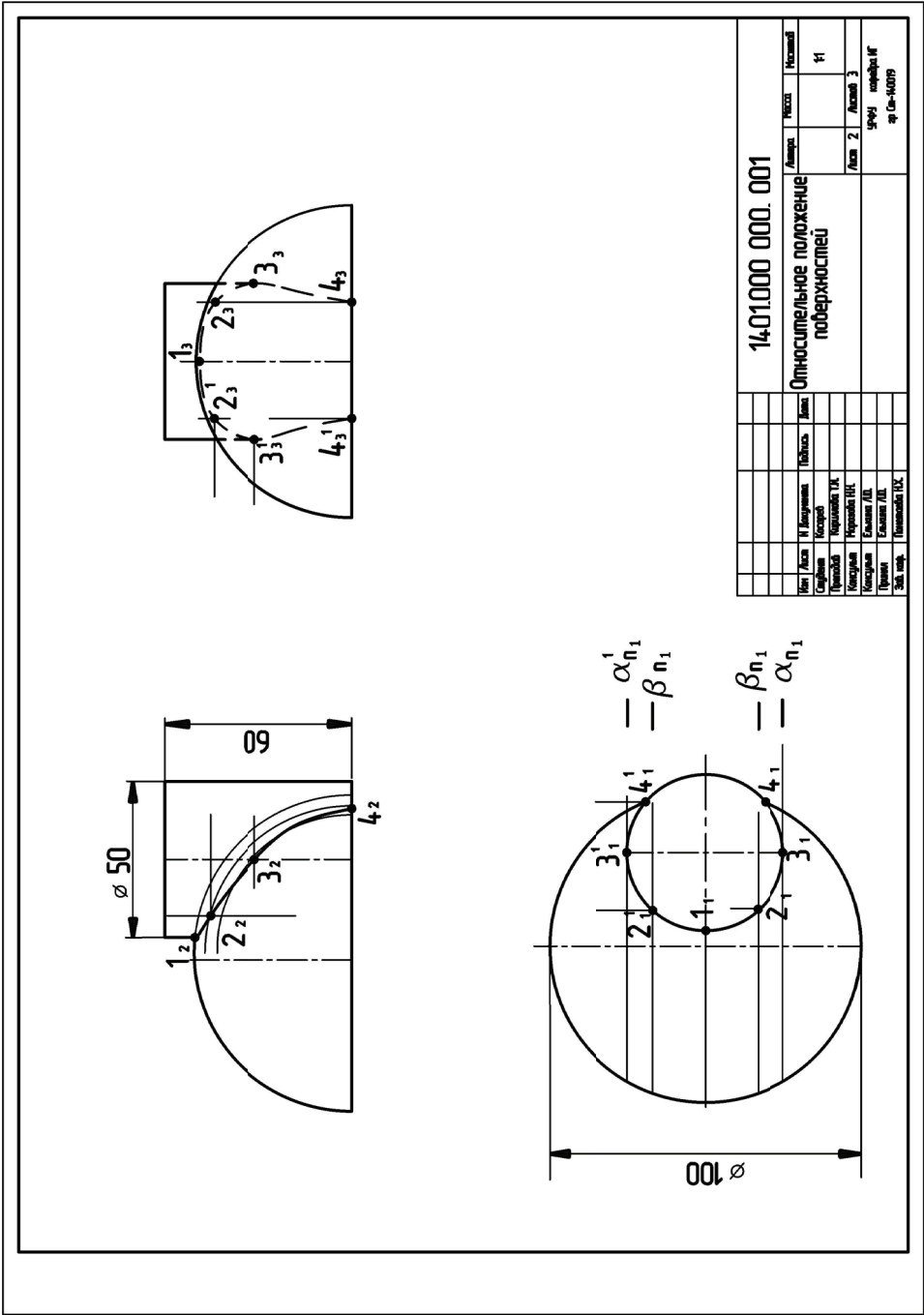


Рис. П.2. Пример выполнения расчетно-графической работы «Относительное положение поверхностей. Способ вспомогательных секущих плоскостей»

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Расчетно-графическая работа «Относительное положение поверхностей. Способ вспомогательных секущих концентрических сфер. Развертка поверхности»

Задача 1. Построить фронтальную проекцию заданных поверхностей и линию их пересечения, используя способ вспомогательных концентрических сферических поверхностей.

Алгоритм выполнения:

1. Начертить в левой части листа одну фронтальную проекцию заданных поверхностей (см. варианты ниже).
2. Определить характерные точки линии пересечения, точки пересечения очерков поверхностей.
3. Определить положение центра вспомогательных концентрических сфер.
4. Определить радиус минимальной R_{\min} и максимальной R_{\max} вспомогательных сфер, обозначить их на чертеже.
5. Построить характерные и промежуточные точки линии пересечения поверхностей.
6. Построенные точки соединить плавной кривой линией.
7. Обвести изображение с учетом видимости.
8. Проставить размеры заданных поверхностей.

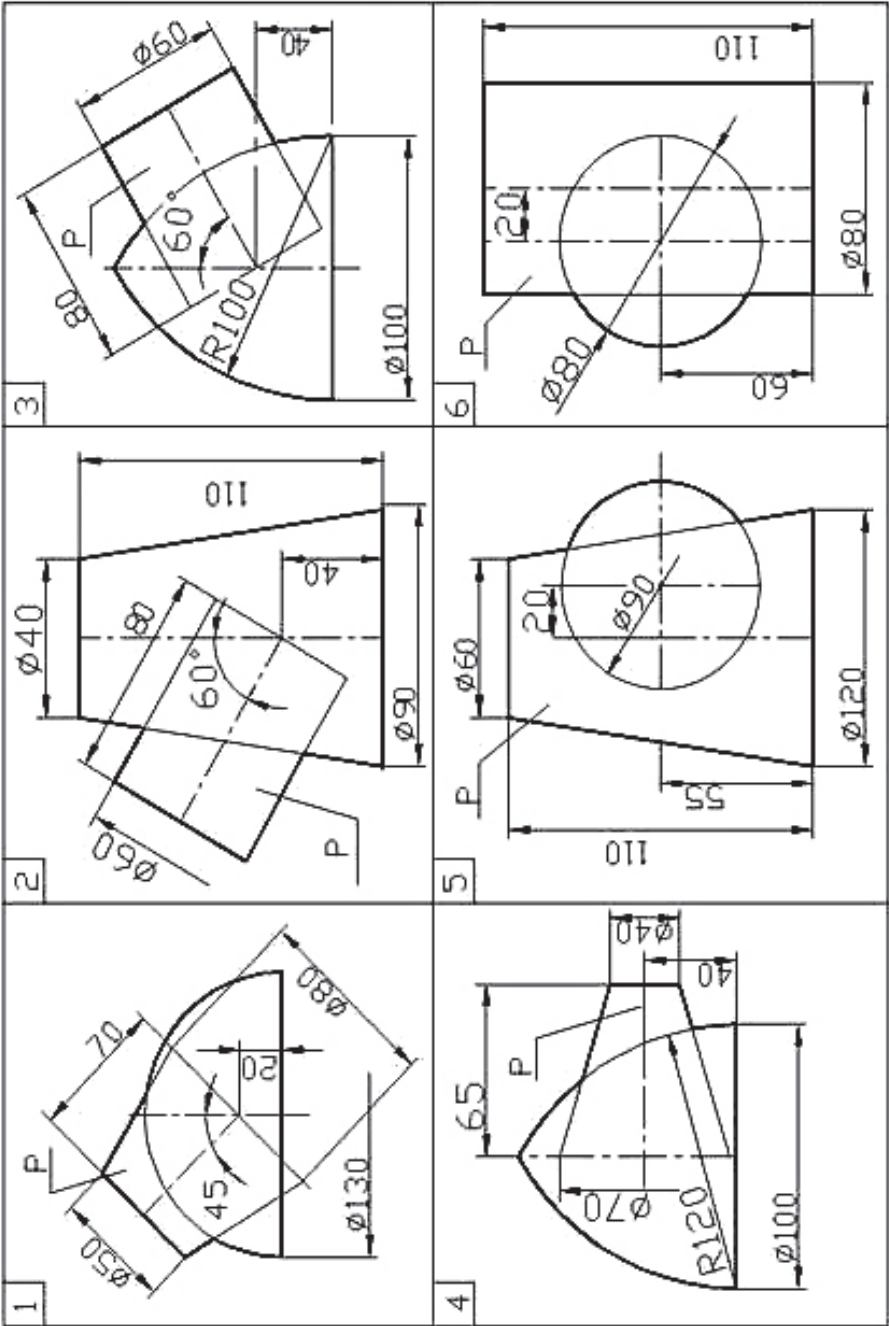
Задача 2. Построить развертку части поверхности, обозначенной буквой Р.

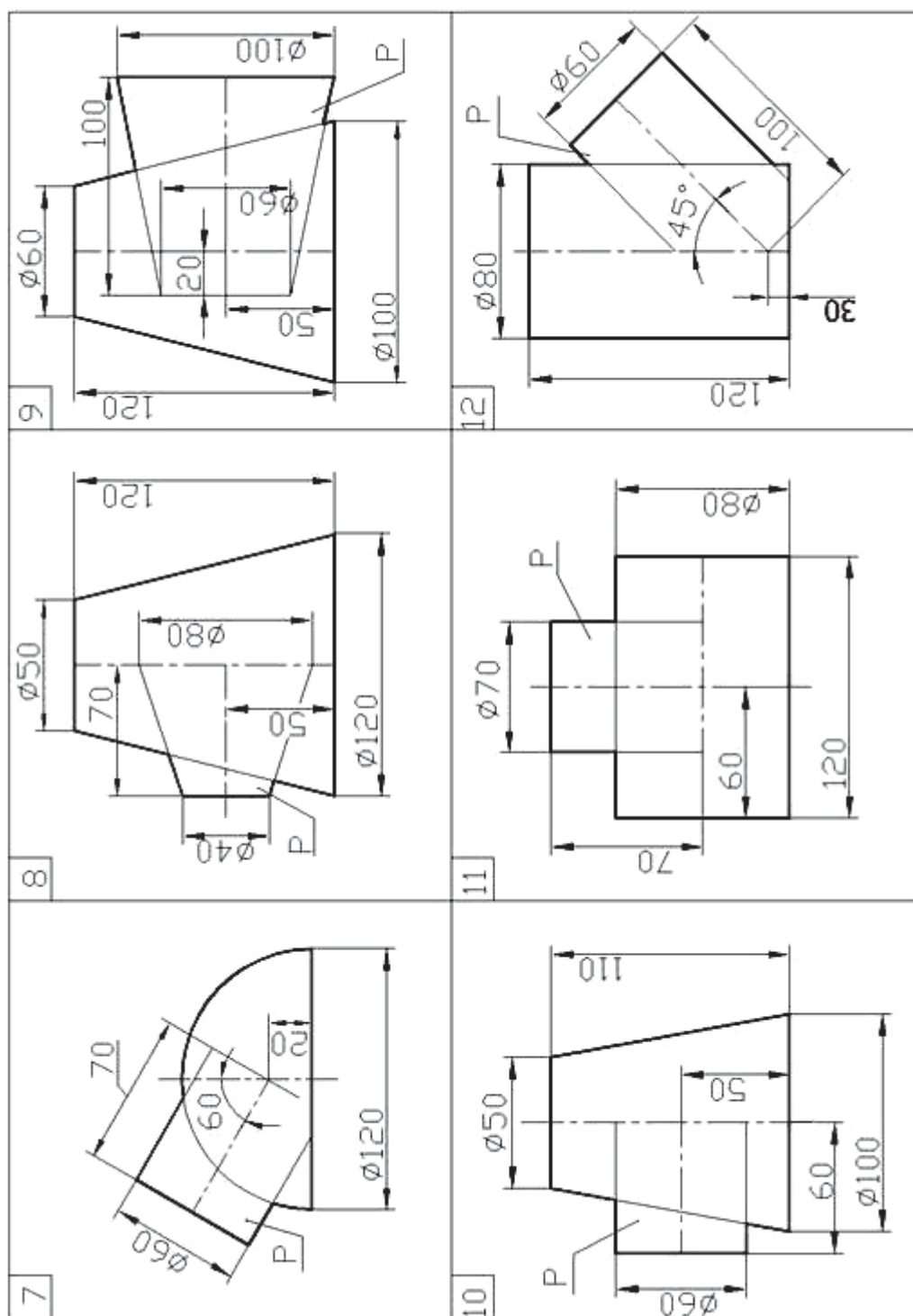
Алгоритм выполнения:

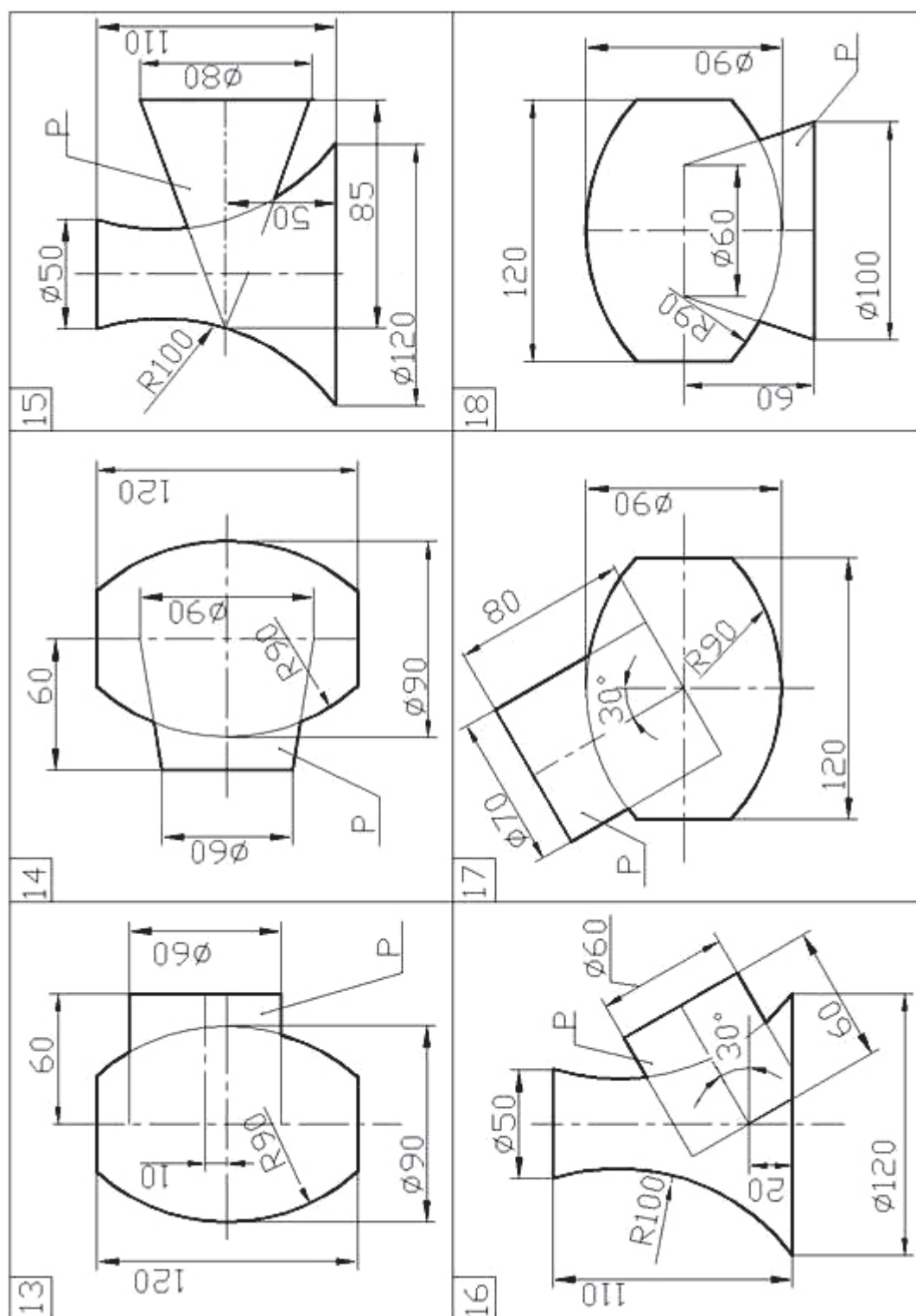
1. Начертить отдельно часть поверхности, обозначенной буквой Р (если это необходимо для построения развертки), расположенной между линией пересечения и основанием поверхности.
2. Построить развертку указанной поверхности. Предварительно произвести аппроксимацию поверхности.
3. Обозначить развертку поверхности, обвести изображение.

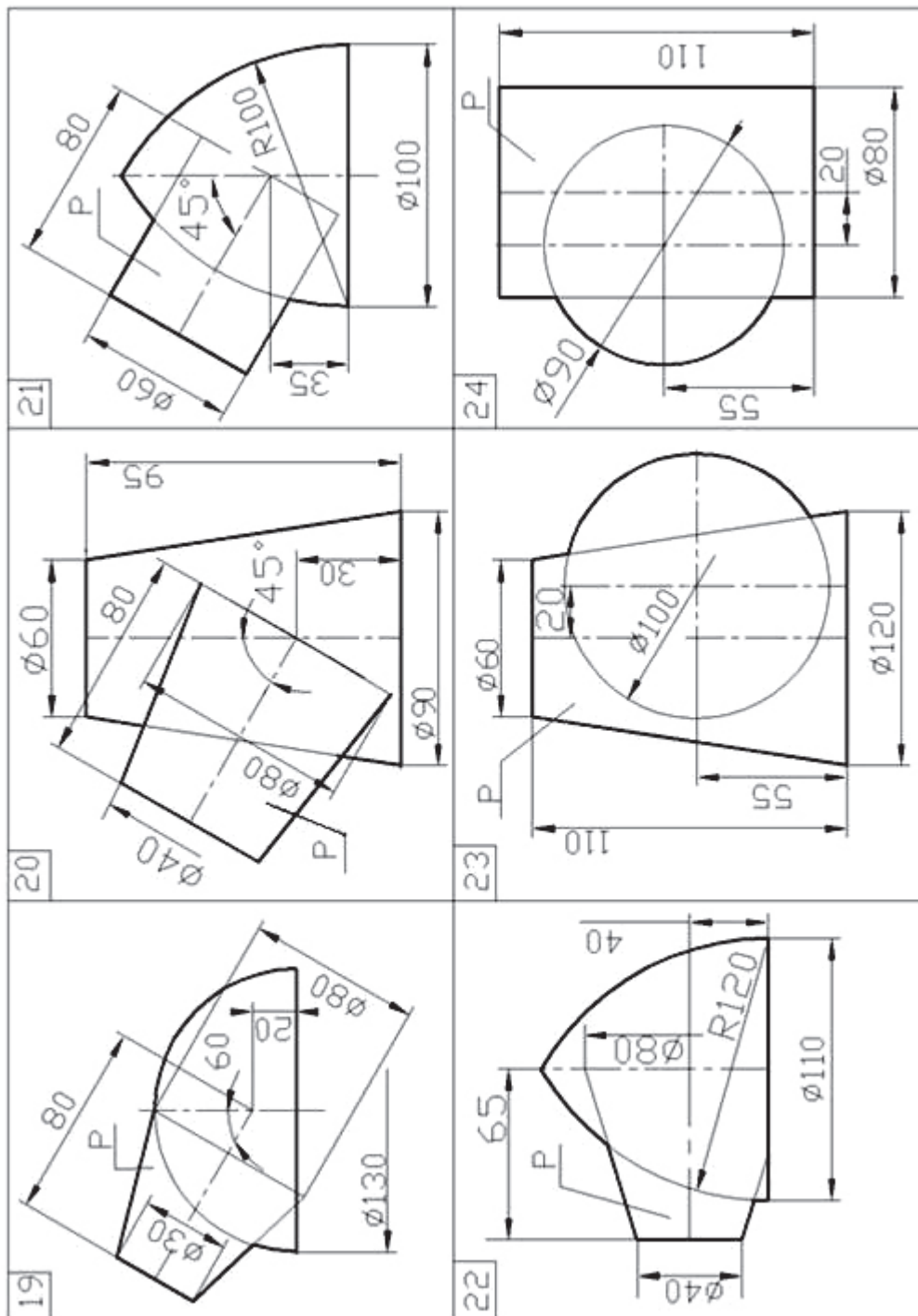
Расчетно-графическая работа выполняется на формате А3, основная надпись по форме 1 (рис. П.4.3). Индивидуальные задания представлены ниже. Линии построенных и вспомогательные линии связи на чертеже не стирать. Пример выполнения расчетно-графической работы приведен на рис. П.3.

Индивидуальные варианты расчетно-графической работы
«Относительное положение поверхностей. Способ вспомогательных секущих концентрических сфер. Развертка поверхности»









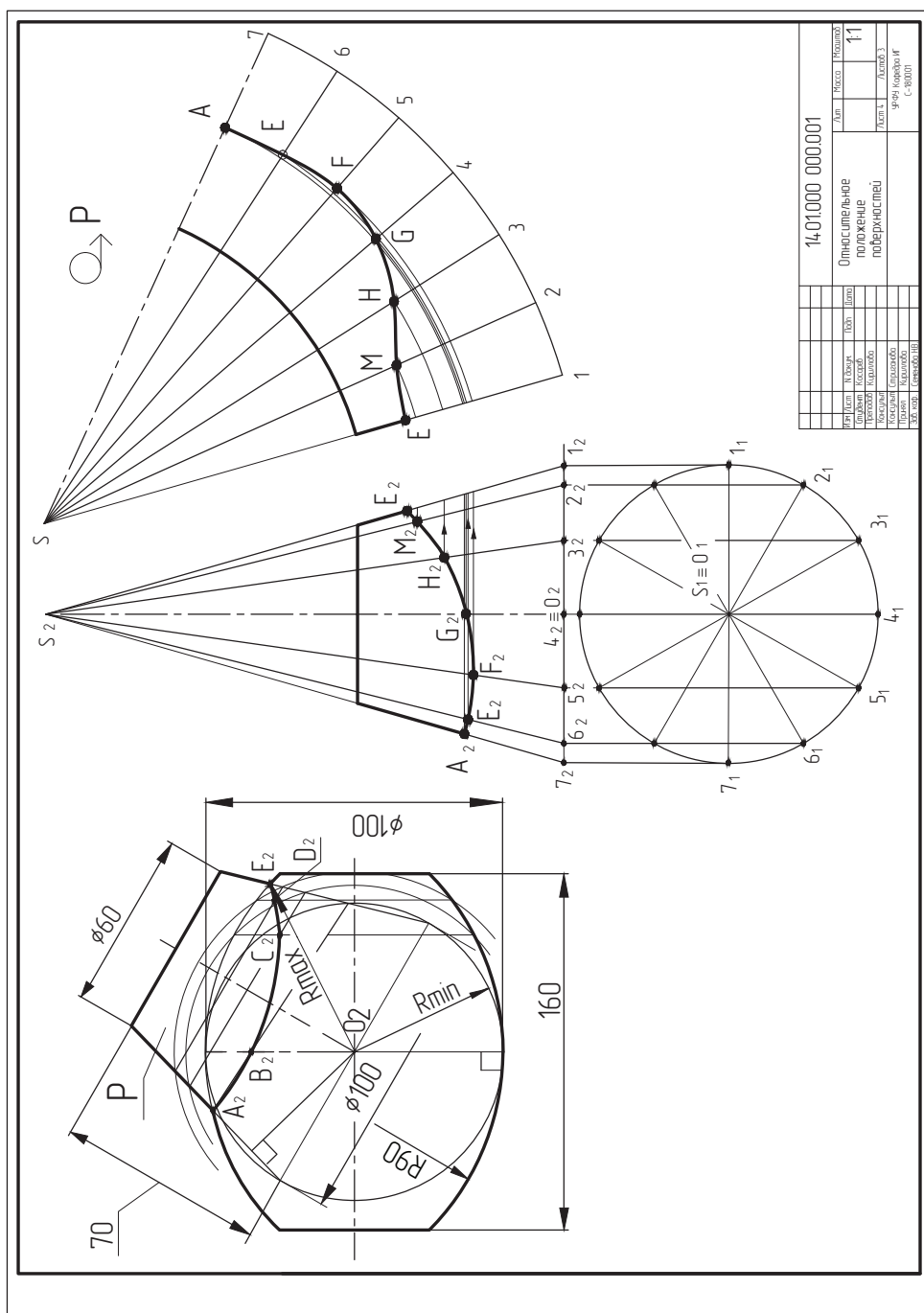


Рис. П.3. Пример выполнения расчетно-графической работы «Относительное положение поверхностей. Способ вспомогательных концентрических поверхностей. Развертка поверхности»

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Оформление расчетно-графической работы

Конструкторские документы всех отраслей промышленности и строительства выполняются в соответствии с требованиями Единой системы конструкторской документации (ЕСКД). Перед выполнением графического задания студент должен изучить государственные стандарты (ГОСТы) системы ЕСКД, устанавливающие правила оформления чертежей (ГОСТы 2.301–68–2.307–68).

Все графические листы расчетно-графической работы сшиваются в папку-скоросшиватель. Первый лист — титульный лист, образец которого приведен на рис. П.4.2, затем подшивают лист 1, 2, 3 и складывают их по формату А4.

Графические и текстовые документы выполняются на отдельных листах формата, размеры которого устанавливает ГОСТ 2.301–68 (см. размеры основных форматов в табл. П.4).

Формат с размерами сторон 1189×841 мм, площадь которого равна 1 м², и другие форматы, полученные путем последовательного деления его на две равные части параллельно меньшей стороне соответствующего формата, принимаются за основные.

Таблица П.4

Размеры форматов, по ГОСТ 2.301–68

Обозначение формата	Основные форматы				
	A0	A1	A2	A3	A4
Размеры сторон формата, мм	841×1189	594×841	420×594	297×420	210×297

Формат листа определяется размерами внешней рамки формата (рис. П.4.1). Рамка формата вычерчивается сплошной тонкой линией, рамка чертежа вычерчивается сплошной толстой основной линией.

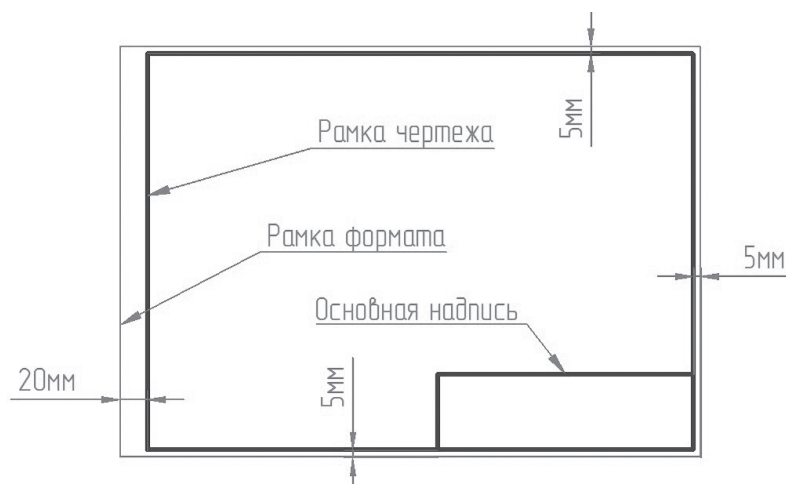


Рис. П.4.1. Оформление формата листа

Министерство образования и науки РФ Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина	
Кафедра инженерной графики	
ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА	
Относительное положение плоскости и поверхности, поверхностей	
Расчетно-графическая работа по начертательной геометрии Вариант №15	
Выполнил: студент группы СТ – 180001	Петров А.Б.
Консультант: _____	Стриганова Л.Ю.
Проверил _____	Кириллова Т.И.
Екатеринбург 2017	

Рис. П.4.2. Пример выполнения титульного листа расчетно-графической работы

Technical drawing of a drawing sheet layout. The overall dimensions are 185 (width) and 11x5 (height). The layout includes a header section with labels for 'Номер варианта задания' (Task variant number) and 'Номер по студенческому билету' (Student ticket number). The header contains the text 'XXXX.00X 000.00X'. Below the header is a table with columns for 'Изм.' (Change), 'Лист' (Sheet), 'N документа' (Document number), 'Подпись' (Signature), and 'Дата' (Date). The table rows are labeled 'Студент' (Student), 'Преподав.' (Teacher), 'Консульт.' (Consultant), 'Консульт.' (Consultant), 'Принял' (Accepted), and 'Зав. каф.' (Head of department). The table also includes a section for 'Наименование темы' (Topic name) with dimensions 70 and 18. The bottom right corner contains the text 'УРФУ кафедра ИГ зр. См-180001'.

Изм.	Лист	N документа	Подпись	Дата
Студент	Косарев			
Преподав.	Кириллова Т. И.			
Консульт.	Стриганова Л.Ю.			
Консульт.	Елькина Л. Ю.			
Принял	Кириллова Т. И.			
Зав. каф.	Понетаева Н. Х.			

Наименование темы

УРФУ кафедра ИГ зр. См-180001

Рис. П.4.3. Основная надпись формы 1 для чертежей основного комплекта документов

Изображения и правила заполнения основных надписей в Единой системе конструкторской документации устанавливает ГОСТ 2.104–2006. Обозначение чертежа состоит из группы цифр и букв, которые обозначают: номер темы, номер варианта задания, номер студента по списку группы или последние цифры номера студенческого билета (для студентов очно-заочной и заочной форм обучения).

Например, тема «Относительное положение поверхности и плоскости» имеет обозначение 1401.006000.026, где:

1401 — номер темы;

006 — номер варианта задания;

000 — свободные нули;

026 — номер студента по списку группы или по студенческому билету.

Выполнение задания нужно начинать с изучения условий задания, затем следовать алгоритму, приведенному для каждого задания, и выполнять его в соответствии с требованиями ГОСТов ЕСКД.

Все представленные графические задания следует выполнять в масштабе 1:1.

Изображения на чертежах нужно обводить линиями, основные назначения и начертание которых устанавливает ГОСТ 2.303–68.

Надписи на чертежах, цифры при простановке размеров, заполнение основной надписи выполняются шрифтами по ГОСТ 2.304–81. Рекомендуется надписи на чертежах и буквенно-цифровые обозначения выполнять шрифтами № 7 и 5.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Выражаем благодарность доц., канд. техн. наук С. В. Арзамасцеву за помощь в подготовке задач, представленных в приложении 5

Задачи для подготовки к текущему контролю знаний по дисциплине «Инженерная графика» (раздел «Начертательная геометрия»)

1. Инвариантные свойства ортогонального проецирования

Инвариантные свойства — это свойства как данного объекта, так и его ортогональных проекций.

- ◇ Проекция точки есть точка: $A \rightarrow A_1; A \rightarrow A_2$.
- ◇ Проекции точек, лежащих на проецирующем луче, совпадают:

$$AB \perp \Pi_1 \Rightarrow A_1 \equiv B_1.$$

- ◇ Точка, принадлежащая прямой, проецируется в точку, принадлежащую проекции этой прямой: $C \in AB \Rightarrow C_2 \in A_2 B_2$.
- ◇ Проекции точек, расположенных в плоскостях проекций, совпадают с самой точкой: $C \in \Pi_1 \Rightarrow C \equiv C_1; D \in \Pi_3 \Rightarrow D \equiv D_3$.
- ◇ Проекция прямой есть прямая: $CD \rightarrow C_1 D_1; CD \rightarrow C_2 D_2$, исключение представляют прямые, перпендикулярные плоскостям проекций.
- ◇ Проекции параллельных прямых параллельны:

$$a \parallel b \Rightarrow a_1 \parallel b_1 \Rightarrow a_2 \parallel b_2.$$

- ◇ Отношение длин отрезков прямой или параллельных отрезков равно отношению их проекций: $a/b = a_1/b_1 = a_2/b_2$.
- ◇ Отрезок прямой, параллельный плоскости проекций, проецируется на нее в натуральную величину: $AB \parallel \Pi_2 \Rightarrow A_2 B_2 \parallel AB; |AB| = |A_2 B_2|$.
- ◇ Проекции пересекающихся прямых имеют одну общую точку, проекции точки пересечения проекций лежат на одной линии связи:

$$AB \cap CD = K \Rightarrow A_1 B_1 \cap C_1 D_1 = K_1 \Rightarrow A_2 B_2 \cap C_2 D_2 = K_2.$$

- ◇ Проекция многоугольника есть многоугольник: $ABCD \rightarrow A_1 B_1 C_1 D_1$.
- ◇ Прямой угол, у которого одна сторона параллельна плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину:

$$\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow AB \parallel \Pi_1 \Rightarrow \angle A_1 B_1 C_1 = 90^\circ.$$

Задача 1.1. Построить три проекции точек, заданных координатами, и определить их положение в пространстве: A (60, 40, 35); B (50, 20, 0); C (40, 0, 25); D (20, 0, 0).

Задача 1.2. Построить фронтальную и горизонтальную проекции прямых АВ и CD. Прямая АВ $\parallel \Pi_1$, $|AB| = 40$ мм, $\psi_{AB} = 45^\circ$, А (60, 10, 25), $X_A > X_B$; CD $\parallel \Pi_2$, $|CD| = 25$ мм, $\varphi_{CD} = 30^\circ$, С (10, 20, 15), $X_C < X_D$.

Задача 1.3. Построить проекции точек Е и F, принадлежащих отрезку прямой MN. Точка Е удалена на расстояние 35 мм от плоскости проекций Π_1 , а точка F — на расстояние 15 мм от плоскости проекций Π_2 : М (70, 40, 45); N (20, 5, 15).

Задача 1.4. Построить проекции горизонтального и фронтального следов прямой, проходящей через точки А и В. Определить принадлежность точки М заданной прямой АВ. А (50, 25, 10); В (25, 10, 34); М (? , 15, 10).

Задача 1.5. Достроить проекции параллелограмма ABCD (рис. П. 5.1).

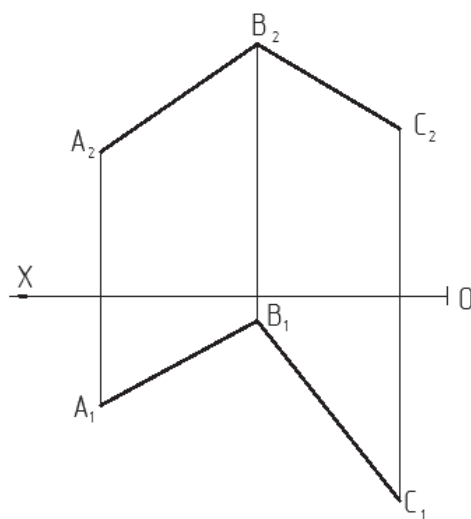


Рис. П.5.1. Иллюстрация к задаче 1.5

Задача 1.6. Построить проекции прямой m, пересекающей прямые АВ и CD и параллельной оси ОХ: А (45, 50, 10); В (45, 10, 45); С (10, 20, 15); D (35, 35, 35).

Задача 1.7. Построить прямой угол ABC, у которого сторона ВС принадлежит прямой MN. $|BC| = 15$ мм (рис. П.5.2).

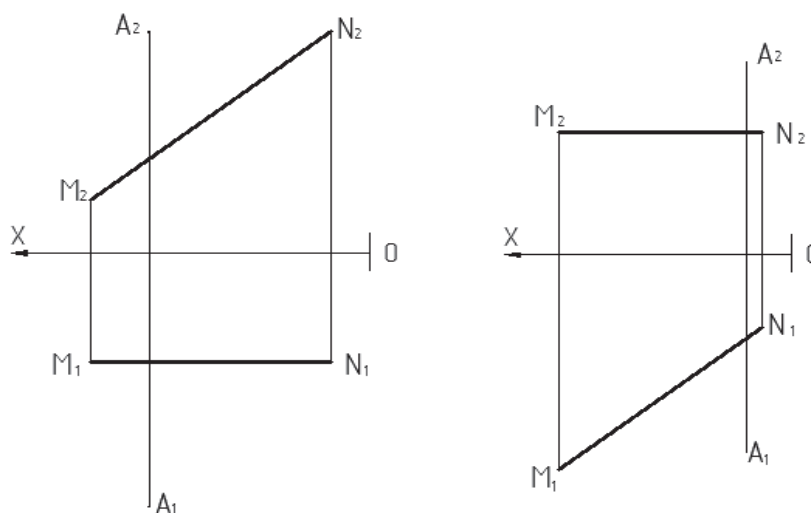


Рис. П.5.2. Иллюстрация к задаче 1.7

Задача 1.8. Построить проекции скрещивающихся прямых l и m , если точки 1 и 3 принадлежат прямой l , а точки 2 и 4 — прямой m (рис. П.5.3).

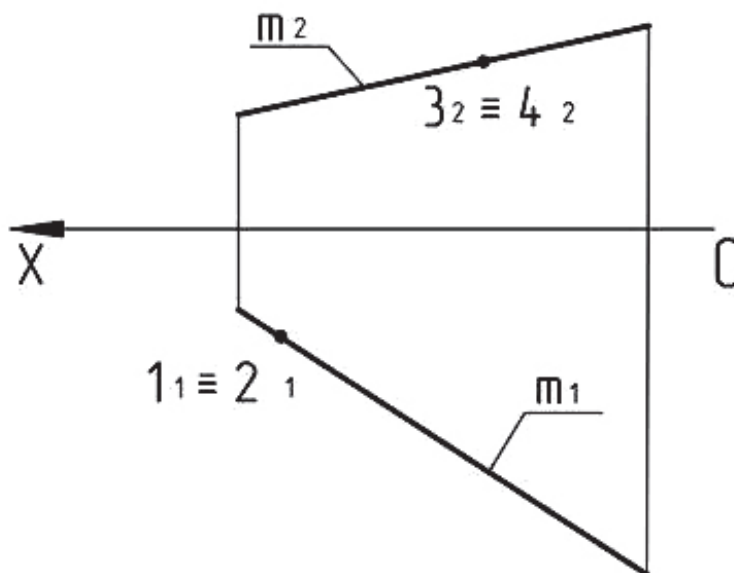


Рис. П.5.3. Иллюстрация к задаче 1.8

2. Прямые общего положения. Способ прямоугольного треугольника

Прямая — это кратчайшее расстояние между двумя точками.

Длина отрезка прямой линии равна гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого равен проекции отрезка на плоскость проекций, а другой — разности координат концов отрезка от этой же плоскости.

Задача 2.1. Найти натуральную величину отрезка AB и углы его наклона к плоскостям проекций Π_1 (угол φ) и Π_2 (угол ψ): $A(90, 45, 0)$; $B(25, 5, 25)$.

Задача 2.2. На отрезке прямой MN определить точку B , находящуюся на расстоянии 60 мм от точки M : $M(110, 35, 45)$; $N(30, 5, 25)$.

Задача 2.3. Дана фронтальная проекция отрезка $AB = 100$ мм. Достроить горизонтальную проекцию отрезка, если $Y_B > Y_A$: $A(95, 10, 5)$; $B(25, ?, 50)$.

Задача 2.4. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми отрезками AB и CD : $A(70, 15, 40)$; $B(35, 15, 5)$; $C(45, 35, 55)$; $D(10, ?, ?)$.

Задача 2.5. Найти расстояние от точки K до прямой AB : $K(50, 45, 35)$; $A(85, 30, 15)$; $B(15, 0, 15)$.

Задача 2.6. Построить проекции отрезка KL по заданным условиям: $|KL| = 70$ мм, $\varphi = 45^\circ$, $\psi = 30^\circ$, $X_L < X_K$, $Y_L < Y_K$, $Z_L < Z_K$, $K(70, 35, 50)$.

Задача 2.7. Построить проекции отрезка AB по заданным условиям: $|AB| = 70$ мм, $\varphi = 35^\circ$, $\psi = 52^\circ$, $A(70, 10, 5)$, $X_A > X_B$, $Y_A < Y_B$, $Z_A < Z_B$.

Задача 2.8. Построить проекции квадрата $ABCD$, диагональ которого лежит на отрезке MN : $A(60, 40, 50)$; $M(115, 45, 30)$; $N(30, 0, 30)$.

Задача 2.9. Построить ромб $ABCD$, зная, что отрезок BD является одной из его диагоналей, а вершина A принадлежит прямой EF : $B(95, 25, 55)$; $D(35, 25, 30)$; $E(115, 25, 10)$; $F(55, 55, 30)$.

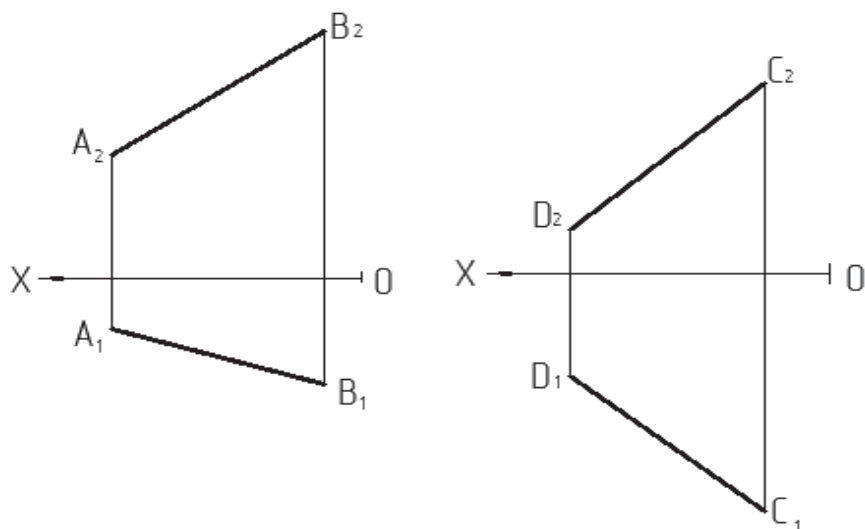


Рис. П.5.5. Иллюстрация к задаче 3.5

Задача 3.6. Достроить проекции параллелограмма ABC , принадлежащего горизонтально проецирующей плоскости α . Достроить проекции треугольника KMN , принадлежащего фронтально проецирующей плоскости β (рис. П.5.6).

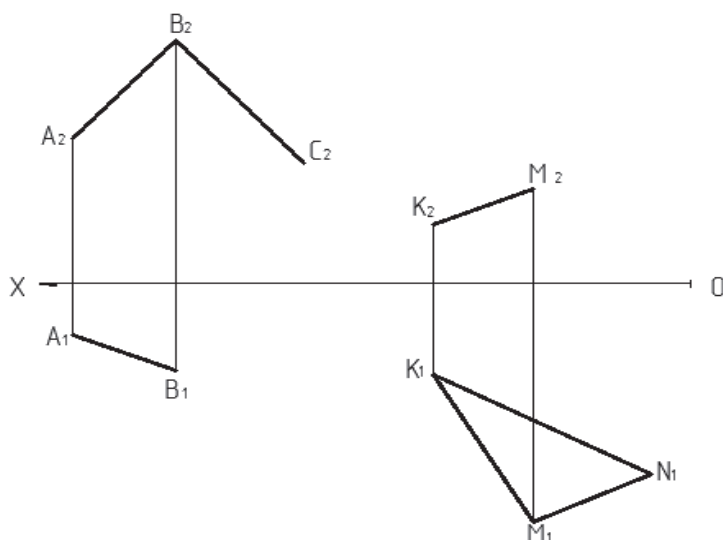


Рис. П.5.6. Иллюстрация к задаче 3.6

Задача 3.7. Достроить горизонтальную проекцию треугольника KMN , лежащего в плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD : $A(70, 30, 35)$; $B(20, 10, 5)$; $C(60, 35, 45)$; $D(10, ?, ?)$; $K(90, ?, 15)$; $M(15, ?, 45)$; $N(40, ?, 5)$.

Задача 3.8. В плоскости α построить отрезок $AB = 60$ мм, если $B \in b$, $A \in \alpha$ (рис. П.5.7). $\alpha_X = 10$, $Z_b = 10$, $A(60, ?, 25)$. Угол между $\alpha_{пл}$ и осью OX равен 30° .

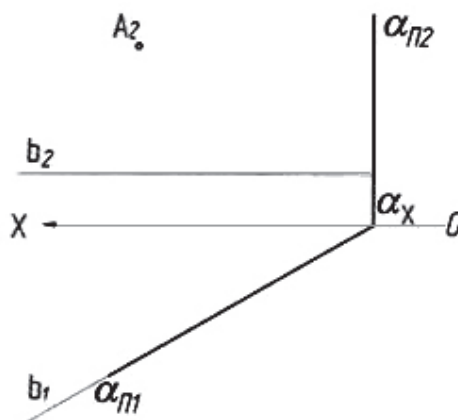


Рис. П.5.7. Иллюстрация к задаче 3.8

4. Построение фигур в плоскости, заданной следами. Построение фигур с использованием особых линий плоскости

Следы плоскости — линии пересечения заданной плоскости и плоскости проекций.

Особые линии плоскости — это линии уровня плоскости и линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций, нормаль плоскости.

Линии уровня плоскости параллельны одной из плоскостей проекций и принадлежат заданной плоскости.

Линии наибольшего наклона плоскости перпендикулярны линиям уровня плоскости.

Нормаль плоскости перпендикулярна заданной плоскости.

Задача 4.1. В плоскости α , заданной следами, построить равнобедренный треугольник ABC, основание которого $AB = 50$ мм и лежит на горизонтали плоскости α . Высота треугольника CD равна 40 мм. Задачу решить с использованием способа прямоугольного треугольника. $A(40, 10, ?)$. $\alpha_X = 60$ мм. Следы направлены вправо от точки схода следов, под углом 40° к оси OX.

Задача 4.2. В плоскости α , заданной следами, построить квадрат ABCD, сторона которого, AB, равна 40 мм и лежит на фронтальной плоскости α (использовать способ прямоугольного треугольника). $A(45, ?, 20)$. $\alpha_X = 70$ мм. Следы направлены вправо от точки схода следов: горизонтальный под углом 40° , а фронтальный — под углом 45° к оси OX.

Задача 4.3. Построить проекции трехгранной призмы ABCA¹ B¹ C¹ высотой 50 мм. Основание — треугольник ABC. AB — горизонталь, $AB = 45$ мм, $c_{AB} = 45$, BC — фронталь, $BC = 40$ мм, $w_{AB} = 30^\circ$, $A(80, 20, 15)$.

Задача 4.4. Построить прямую пирамиду SABCD, в основании параллелограмм ABCD, высота пирамиды SO равна 50 мм. Точка пересечения диагоналей основания — точка O $(55, 50, 40)$. Диагональ AC $\parallel \Pi_2$, $\varphi_{AB} = 30^\circ$, $AB = 50$ мм, диагональ BD $\parallel \Pi_1$, $\psi_{BD} = 30^\circ$, $BD = 30$ мм. $X_A > X_C$, $Z_A < Z_C$, $X_B > X_D$, $Y_B < Y_D$.

Задача 4.5. Построить проекции прямой правильной четырехгранной призмы, стоящей на плоскости $\alpha \perp \Pi_2$ ($\varphi = 45^\circ$), проходящей через точку O $(60, 40, 25)$. Точка O — центр основания призмы. Диагональ основания AC $\parallel \Pi_2$, $|AC| = 60$ мм, высота призмы $H = 80$ мм. Найти точку пересечения прямой MN с призмой. Определить видимость. M $(150, 55, 80)$; N $(35, 10, 30)$.

Задача 4.6. Построить проекции правильной трехгранной призмы, приняв отрезок AA¹ за ее ребро. Сторона основания AB равна 50 мм и параллельна фронтальной плоскости проекций, AC = 40 и параллельна горизонтальной плоскости проекций. $A(70, 10, 0)$; $A^1(20, 40, 45)$.

5. Относительное положение прямой и плоскости, плоскостей

5.1. Пересекающиеся прямая и плоскость, плоскости

Прямая и плоскость пересекаются, если у них есть одна общая точка. Плоскости пересекаются по прямой линии. Для построения линии пересечения плоскостей достаточно найти две общие точки, одновременно принадлежащие плоскостям.

Задача 5.1. Найти точку пересечения прямой EF с плоскостью ΔABC и определить видимость прямой EF: A (125, 5, 10); B (90, 45, 50); C (40, 20, 0); E (110, 35, 0); F (45, 10, 50).

Задача 5.2. Найти проекции точки пересечения K прямой AB с плоскостью α , заданной следами. $\alpha_x = 10$ мм. $\alpha_{\Pi} \wedge OX = 30^\circ$. $\alpha_{\Pi} \wedge OX = 45^\circ$. Следы наклонены влево от точки схода следов. A (65, 15, 5); B (30, 35, 50).

Задача 5.3. Найти точку пересечения отрезка прямой KL с плоскостью параллелограмма ABCD. Определить видимость KL. K (120, 45, 55); L (0, 5, 10); A (110, 20, 40); B (75, 0, 50); C (15, 30, 20).

Задача 5.4. Построить линию пересечения ΔKMN и ABCD. Определить видимость сторон. A (100, 30, 20); B (50, 40, 45); C (20, 20, 25); M (120, 55, 0); N (5, 45, 35); K (60, ?, ?). $K_1 \in C_1D_1$; $K_2 \in M_2N_2$.

Задача 5.5. Построить линию пересечения треугольника ΔABC и параллелограмма KLMN. Определить видимость сторон. A (100, 15, 55); B (50, 50, 40); C (70, 0, 0); K (110, 0, 45); L (30, 0, 30); M (45, 35, 0).

Задача 5.6. Построить проекции линии пересечения двух треугольников ABC и DEF. A (120, 35, 25); B (90, 5, 45); C (40, 30, 5); D (105, 15, 10); E (70, 45, 55); F (20, 5, 15).

Задача 5.7. Построить проекции линии пересечения треугольников ABC и DEF с учетом видимости сторон. A (85, 0, 35); B (75, 50, 0); C (20, 45, 30); D (80, 50, 20); E (75, 20, 55); F (15, 25, 5).

Задача 5.8. Построить проекции линии пересечения треугольников ABC и DEF с учетом видимости сторон. A (55, 20, 10); B (25, 55, 55); C (0, 20, 25); D (75, 60, 15); E (40, 10, 45); F (5, 45, 5).

Задача 5.9. Построить проекции линии пересечения треугольников ABC и DEF с учетом видимости сторон. A (70, 30, 40); B (20, 5, 50); C (0, 35, 15); D (25, 40, 10); E (50, 5, 30); F (0, 25, 45).

5.2. Параллельные и перпендикулярные прямые и плоскости

Параллельные прямые — это прямые, которые не пересекаются. Параллельные прямые имеют параллельные проекции.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной прямой, принадлежащей этой плоскости.

Плоскости параллельны, если они не имеют общих точек. Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости.

Плоскости перпендикулярны, если одна плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Задача 5.10. Определить расстояние от точки K (85, 50, 50) до плоскости α , заданной следами. $\alpha_x = 100$. Следы направлены вправо от точки схода следов α_x . Горизонтальный след α_{Π} составляет с осью OX угол 45° , а фронтальный след α_{Π} составляет с осью OX угол 45° .

Задача 5.11. Из вершины A треугольника ABC восстановить перпендикуляр к плоскости треугольника. На этом перпендикуляре найти точку, удаленную от ΔABC на расстояние 40 мм, и через нее провести плоскость $\beta \parallel \Delta ABC$. Плоскость β задать двумя пере-

секающимися прямыми: фронталью и горизонталью. Горизонталь и фронталь направить вправо от точки пересечения. А (60, 5, 10); В (30, 5, 35); С (15, 25, 10).

Задача 5.12. Построить проекции линии пересечения плоскостей α и β , заданных следами. $\alpha_x = 85$ мм; $\alpha_{\pi_1} \wedge OX = 30^\circ$, $\alpha_{\pi_2} \wedge OX = 65^\circ$, следы наклонены вправо от точки схода следов. $\beta_x = 10$ мм; $\beta_{\pi_1} \wedge OX = 45^\circ$, $\beta_{\pi_2} \wedge OX = 30^\circ$, следы наклонены влево от точки схода следов.

Задача 5.13. Построить плоскость, включающую точку D, перпендикулярную плоскости треугольника ABC и параллельную ее горизонтали. Плоскость задать пересекающимися прямыми DE и DF. $X_D < X_E$, $X_E > X_F$, $X_F < X_D$, $Y_E > Y_F$. А (70, 5, 25); В (50, 35, 40); С (40, 15, 5); D (30, 20, 40).

Задача 5.14. Определить, перпендикулярны ли треугольники ABC и BCD: А (75, 10, 30); В (65, 35, 10); С (40, 10, 50); D (25, 30, 20).

Задача 5.15. Определить расстояние от точки D до треугольника ABC: А (100, 30, 15), В (60, 5, 65), С (25, 60, 30), D (80, 55, 65).

Задача 5.16. Достроить проекции ромба ABCD, если диагональ BD параллельна плоскости α , а вершина В лежит в плоскости Π_1 : А (85, 15, 10); С (60, 25, 25). $\alpha_x = 20$ мм, $\alpha_{\pi_1} \wedge OX = 45^\circ$ (рис. П.5.8).

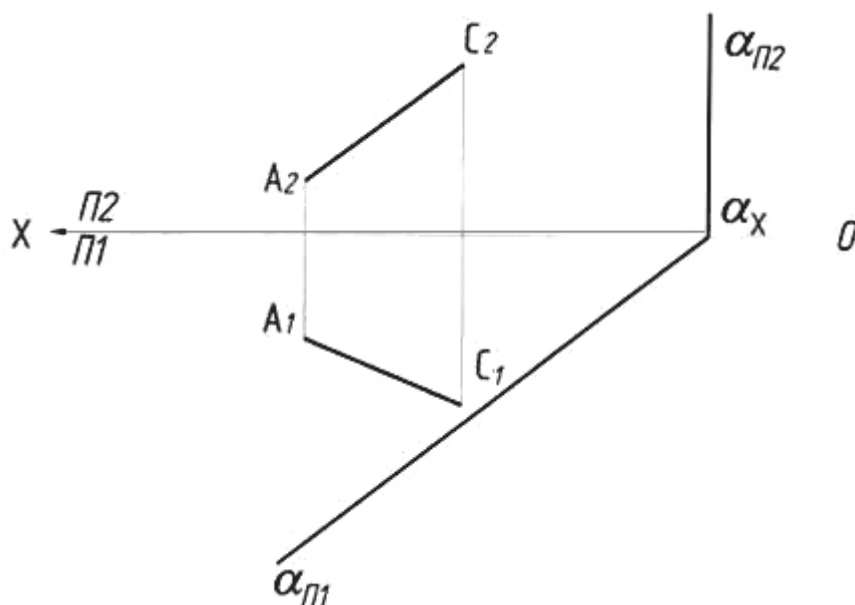


Рис. П.5.8. Иллюстрация к задаче 5.16

Задача 5.17. Задан треугольник $\triangle ABC$. Построить плоскость, заданную $\triangle DEF$, параллельную $\triangle ABC$, на расстоянии 25 мм. Треугольник $\triangle DEF$ равнобедренный, со стороной 20 мм. А (105, 0, 30), В (50, 10, 65), С (20, 65, 0).

Задача 5.18. Построить плоскость β , параллельную плоскости α , на расстоянии 40 мм. Плоскости α и β заданы следами. $\alpha_x = (50, 0, 0)$, $\alpha_{\pi_2} \wedge OX = 45^\circ$, $\alpha_{\pi_1} \wedge OX = 45^\circ$.

6. Поверхности

Задача 6.1. Построить проекции цилиндра, приняв АВ за одну из его образующих. Ось вращения цилиндра перпендикулярна фронтальной плоскости проекций. О — центр основания цилиндра. О (35, 0, 30), А (45, 0, 10), В (45, 40, 10).

Задача 6.2. Построить горизонтальную, фронтальную и профильную проекции точек, принадлежащих поверхностям сферы, конуса и цилиндра (рис. П.5.9).

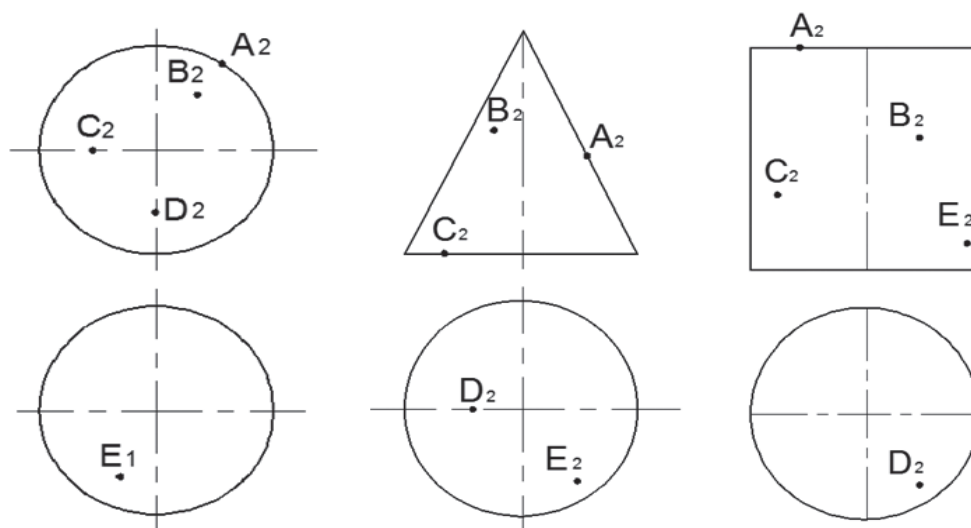


Рис. П.5.9. Иллюстрация к задаче 6.2

Задача 6.3. Построить проекции конуса, приняв SB за одну из его образующих. Ось вращения конуса перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. O — центр основания конуса. $O(40, 35, 0)$, $S(40, 35, 50)$, $B(20, 15, 0)$.

Задача 6.4. Построить фронтальную и горизонтальную проекции поверхности открытого тора. Ось вращения поверхности перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. Радиус вращения — 30 мм, диаметр окружности — 20 мм.

Задача 6.5. Построить фронтальную и горизонтальную проекции поверхности тора самопересекающегося. Ось вращения поверхности перпендикулярна профильной плоскости проекций. Экватор поверхности — 60 мм, радиус образующей окружности — 60 мм.

7. Относительное положение поверхности и плоскости

Задача 7.1. Построить три проекции сечений поверхности цилиндра плоскостями (рис. П.5.10).

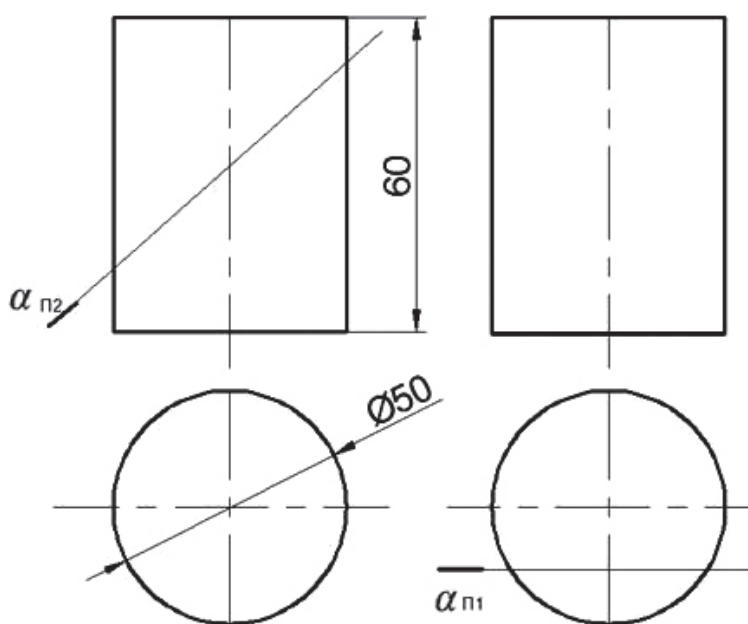


Рис. П.5.10. Иллюстрация к задаче 7.1

Задача 7.2. Построить проекции сечений поверхности конуса плоскостями (рис. П.5.11).

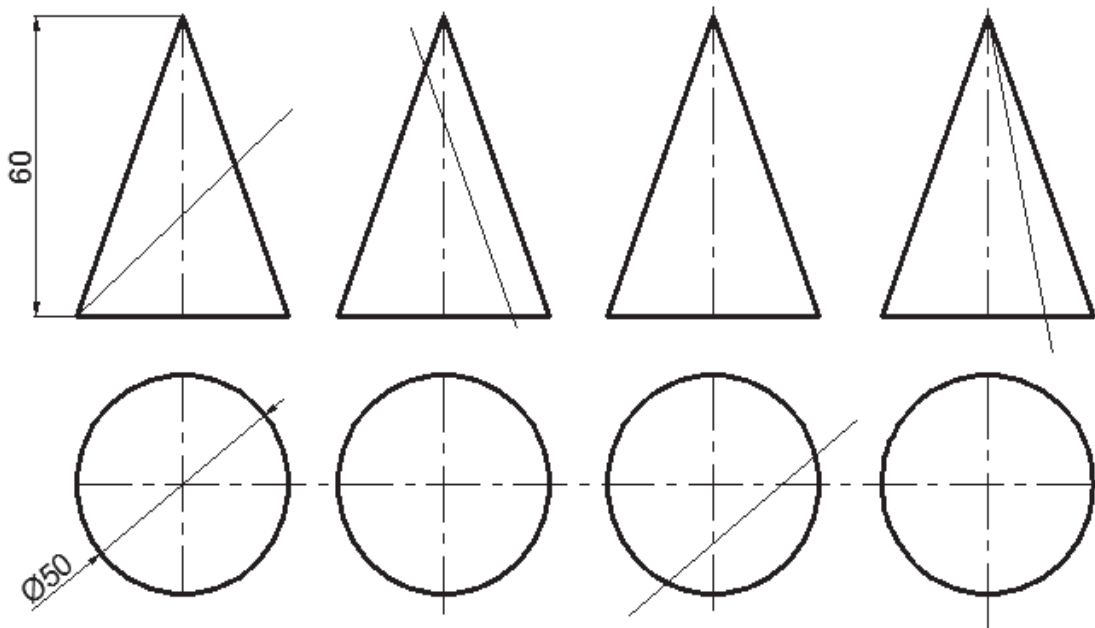


Рис. П.5.11. Иллюстрация к задаче 7.2

Задача 7.3. Построить три проекции сечения поверхности сферы плоскостью α (рис. П.5.12).

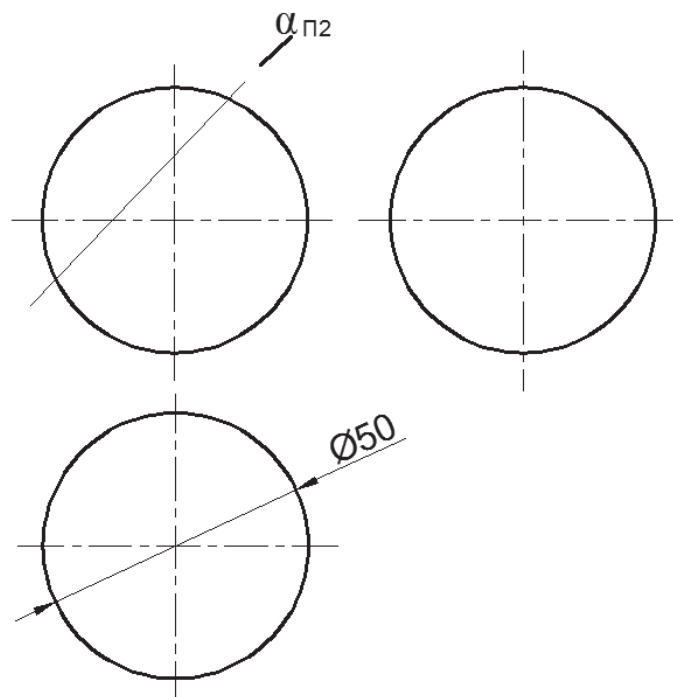


Рис. П.5.12. Иллюстрация к задаче 7.3

Задача 7.4. Построить три проекции поверхности цилиндра с вырезом (рис. П.5.13).

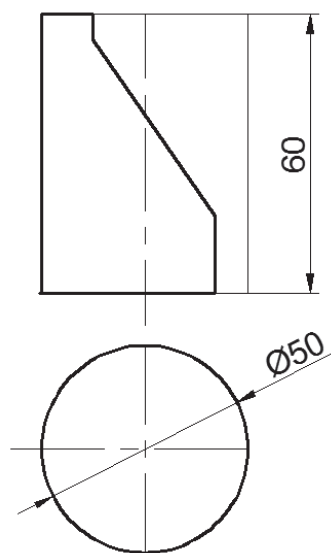


Рис. П.5.13. Иллюстрация к задаче 7.4

Задача 7.5. Построить три проекции поверхности сферы с вырезом (рис. П.5.14).

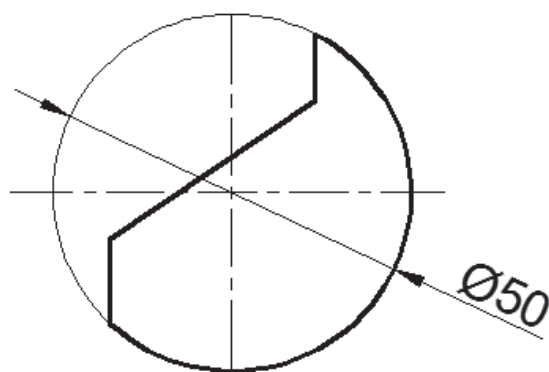


Рис. П.5.14. Иллюстрация к задаче 7.5

Задача 7.6. Построить три проекции поверхности конуса с вырезом (рис. П.5.15).

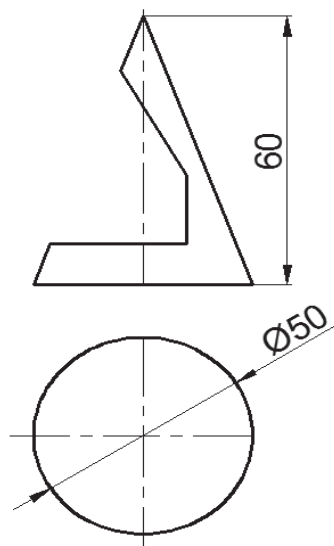


Рис. П.5.15. Иллюстрация к задаче 7.6

Задача 7.7. Построить три проекции сечения комбинированной поверхности плоскостью и определить натуральную величину сечения (рис. П.5.16).

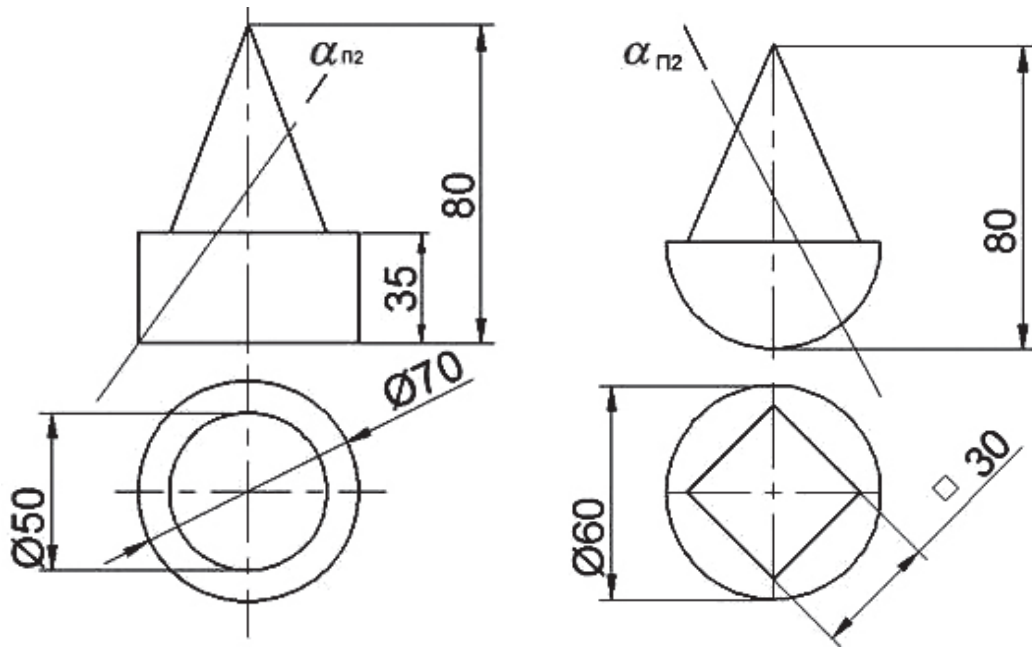


Рис. П.5.16, а. Иллюстрации к задаче 7.7

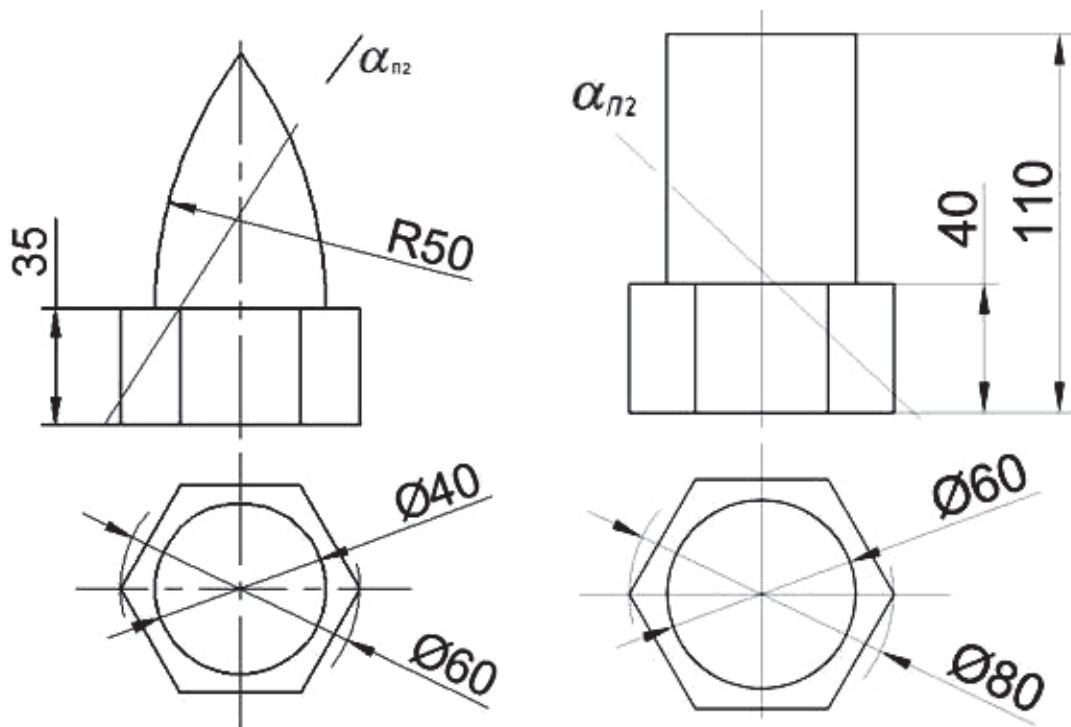


Рис. П.5.16, б. Иллюстрации к задаче 7.7

Задача 7.8. Построить натуральную величину сечения тора плоскостью α (рис. П.5.17).

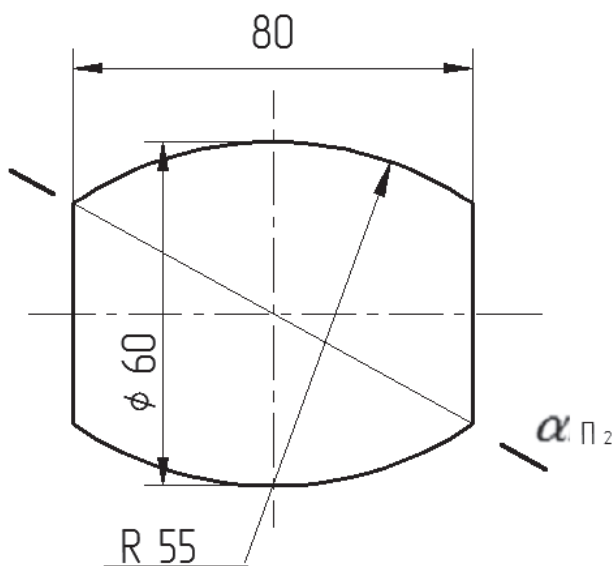


Рис. П.5.17. Иллюстрация к задаче 7.8

Задача 7.9. Построить три проекции поверхности с вырезом (рис. П.5.18).

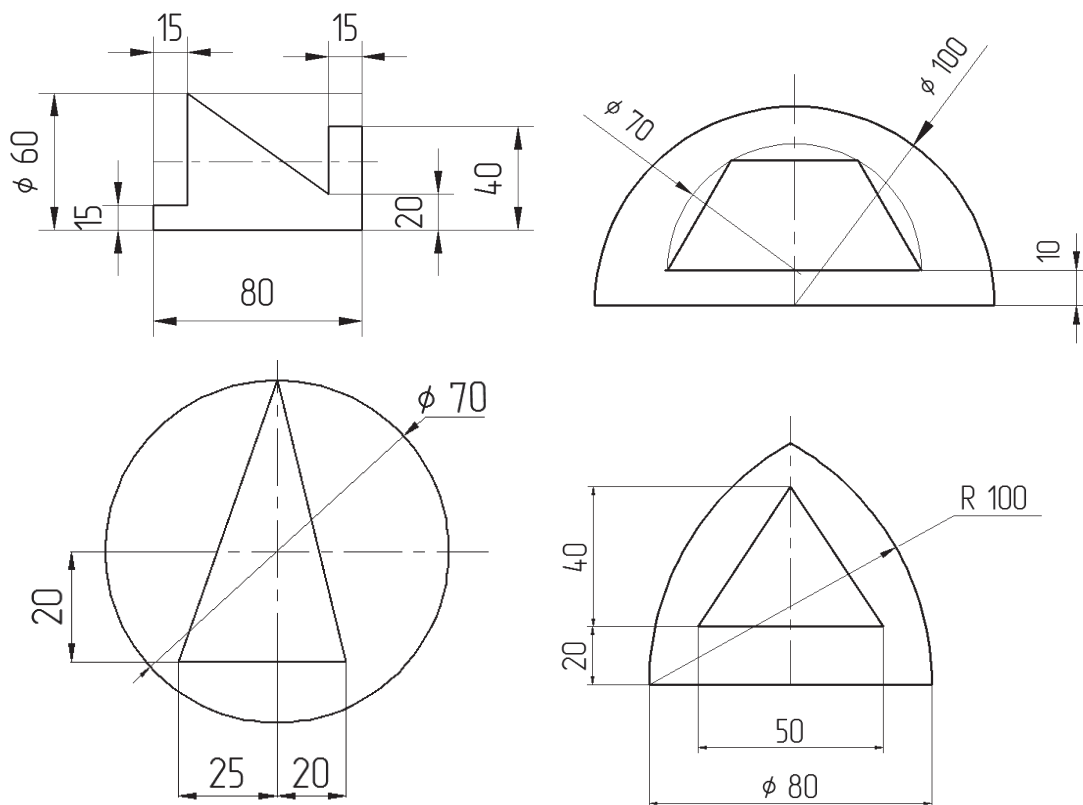


Рис. П.5.18. Иллюстрации к задаче 7.9

8. Относительное положение поверхностей

Задача 8.1. Построить три проекции линии пересечения двух цилиндров (рис. П.5.19).

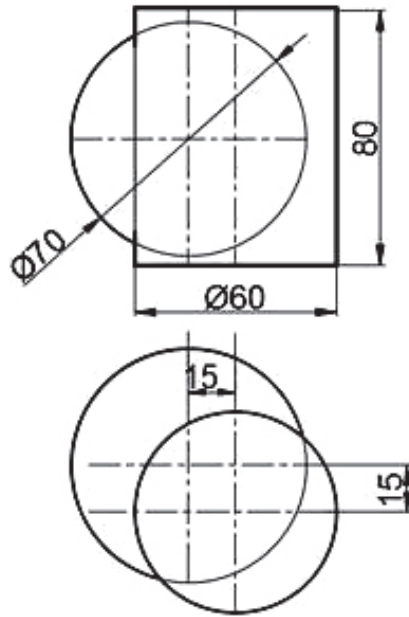


Рис. П.5.19. Иллюстрация к задаче 8.1

Задача 8.2. Построить три проекции линии пересечения поверхностей (рис. П.5.20).

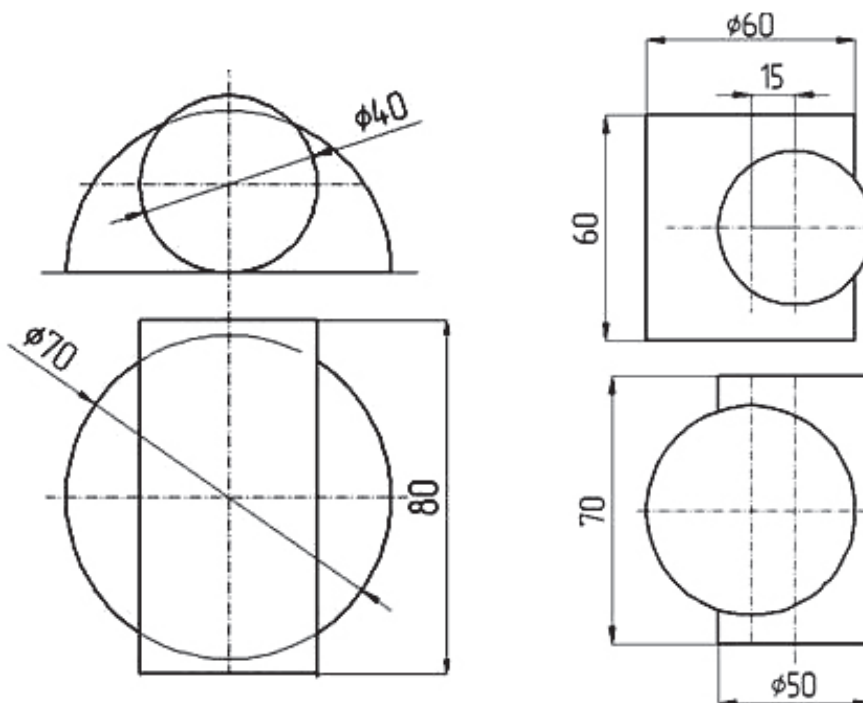


Рис. П.5.20. Иллюстрации к задаче 8.2

Задача 8.3. Построить две проекции линии пересечения поверхностей тора-кольца и цилиндра (рис. П.5.21).

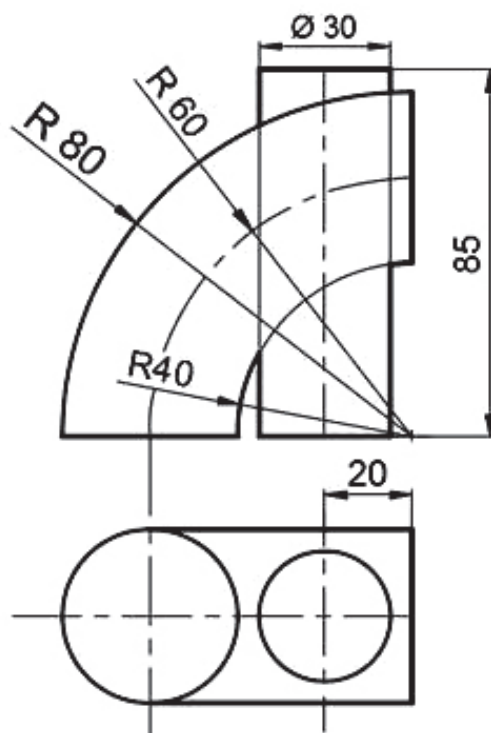


Рис. П.5.21. Иллюстрация к задаче 8.3

Задача 8.4. Построить две проекции линии пересечения конуса и цилиндра (рис. П.5.22).

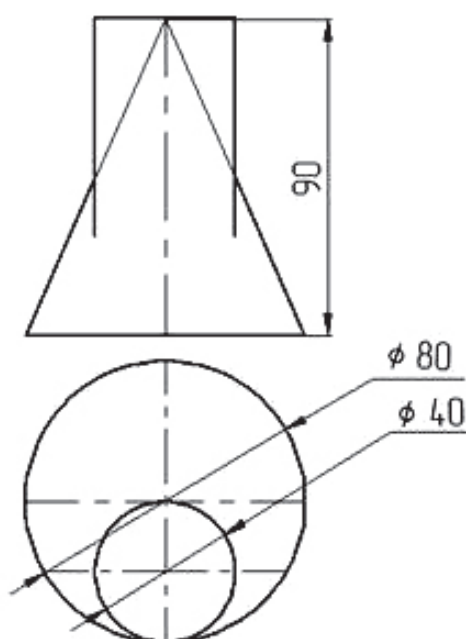


Рис. П. 5.22. Иллюстрация к задаче 8.4

Задача 8.5. Построить две проекции линии пересечения поверхностей (рис. П.5.23).

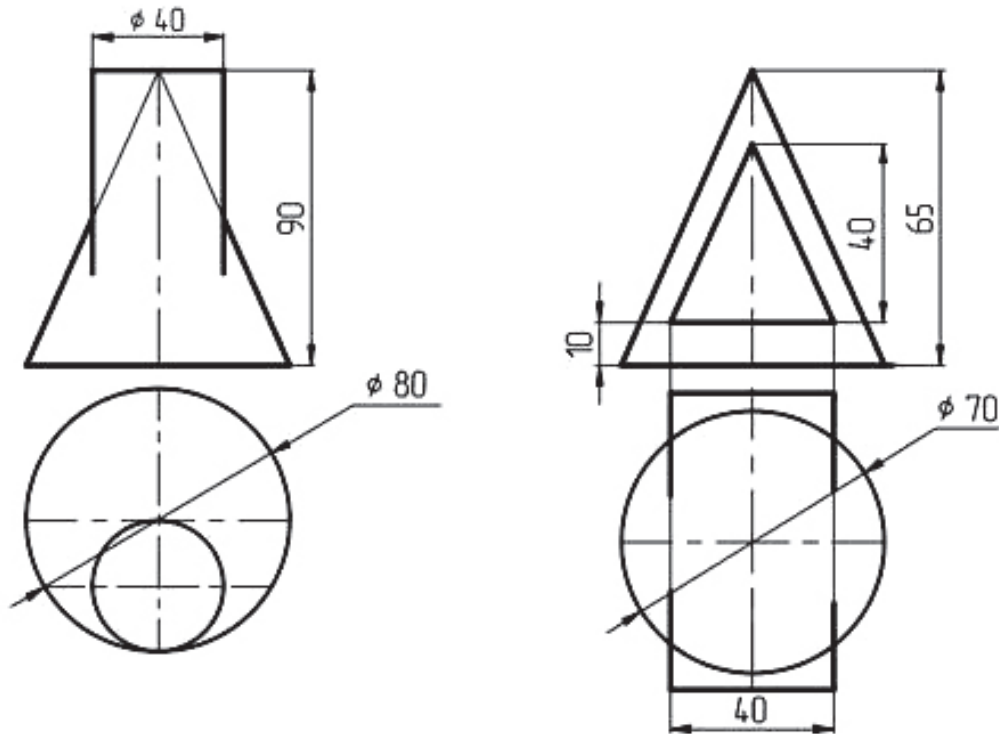


Рис. П.5.23. Иллюстрации к задаче 8.5

Задача 8.6. Построить три проекции линии пересечения поверхностей конуса и тора самопересекающегося (рис. П.5.24).

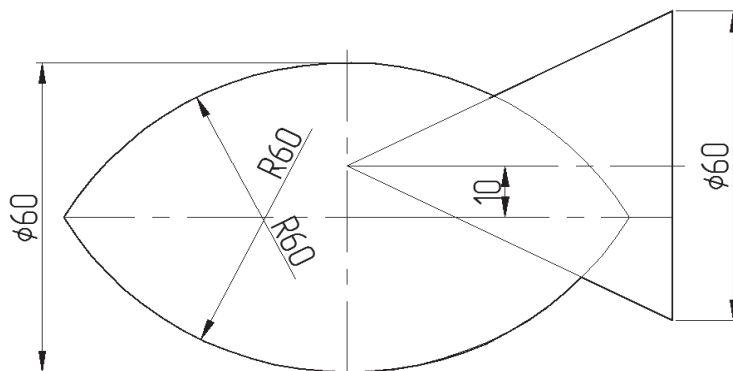


Рис. П.5.24. Иллюстрация к задаче 8.6

Задача 8.7. Построить две проекции линии пересечения поверхностей (рис. П.5.25).

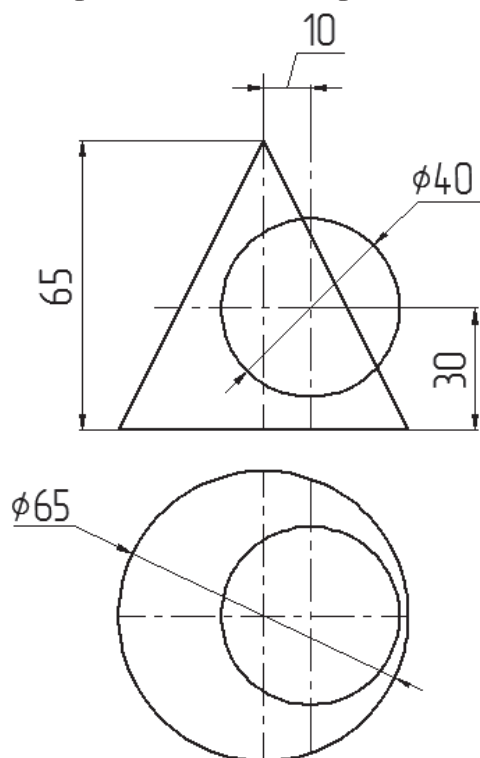


Рис. П.5.25. Иллюстрация к задаче 8.7

Задача 8.8. Построить линию пересечения поверхностей (рис. П.5.26).

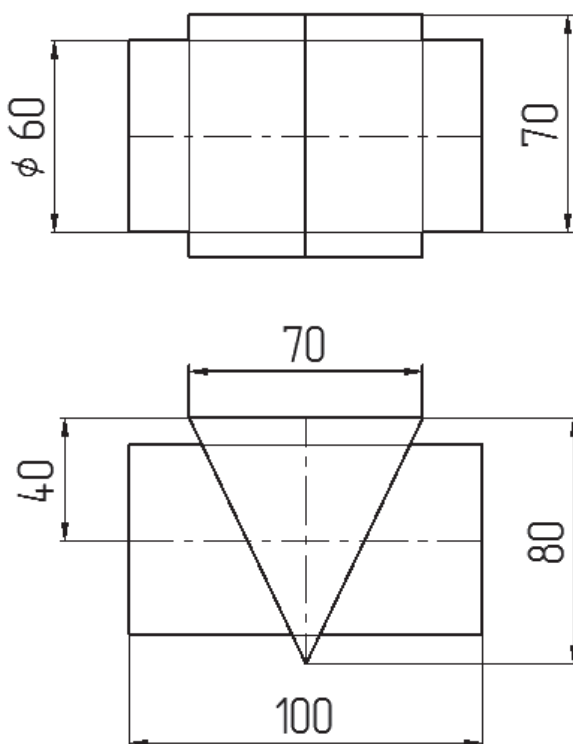


Рис. П.5.26. Иллюстрация к задаче 8.8

Задача 8.9. Построить одну проекцию линии пересечения поверхностей способом концентрических сфер и развёртку поверхности, обозначенной Р (рис. П.5.27).

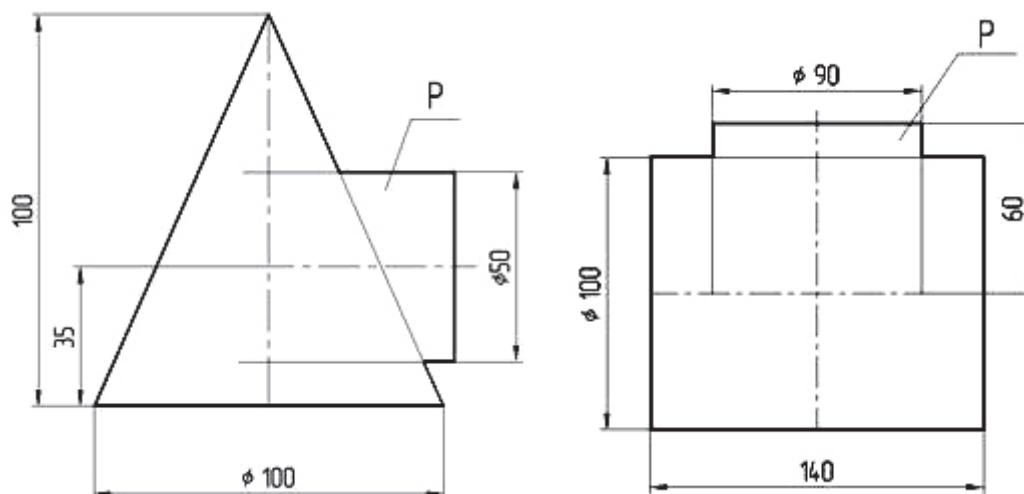


Рис. П.5.27, а. Иллюстрации к задаче 8.9

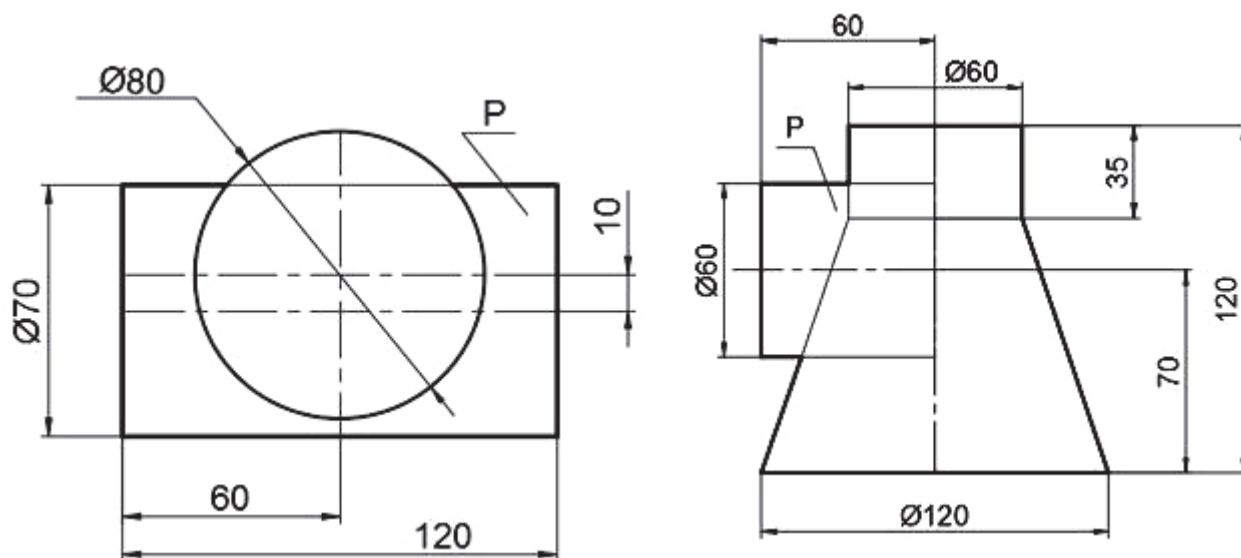


Рис. П.5.27, б. Иллюстрации к задаче 8.9

9. Способы преобразования проекций

Преобразование проекций — это построение новых проекций, удобных для решения задачи.

Задача 9.1. Найти натуральную величину $\triangle ABC$ и угол его наклона к плоскости проекций P_1 способом перемены плоскостей проекций: А (120, 5, 25); В (90, 40, 5); С (70, 25, 35).

Задача 9.2. Найти натуральную величину $\triangle ABC$ и угол его наклона к плоскости проекций P_2 (угол ψ) способом вращения вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций: А (120, 5, 45); В (90, 40, 25); С (70, 25, 55).

Задача 9.3. Найти натуральную величину $\triangle ABC$ и угол его наклона к плоскости проекций P_1 (угол φ) способом плоскопараллельного перемещения: А (120, 5, 45); В (90, 40, 25); С (70, 25, 55).

Задача 9.4. Найти натуральную величину ΔABC . При решении использовать способ вращения вокруг горизонтали. $A(80, 25, 25)$; $B(45, 5, 5)$; $C(20, 10, 40)$.

Задача 9.5. Определить натуральную величину ΔDEF вращением вокруг фронтали. В ходе решения построить одну из промежуточных проекций, когда $\Delta DEF \perp P_2$. Построить горизонтальную проекцию траектории движения точки E . $D(85, 10, 20)$; $E(75, 35, 60)$; $F(40, 10, 55)$.

Задача 9.6. Определить способом перемены плоскостей проекций расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD . $A(130, 0, 30)$; $B(85, 10, 0)$; $C(110, 35, 5)$; $D(70, 5, 35)$. Примечание: расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которые можно заключить эти прямые.

Задача 9.7. Определить угол между плоскостями, заданными треугольниками ABC и BCD . Применить способ перемены плоскостей проекций. Определить видимость сторон треугольников. $A(115, 10, 15)$; $B(110, 5, 45)$; $C(70, 20, 5)$; $D(90, 35, 0)$. Примечание: произвести двойную переменную плоскостей проекций, преобразовав линию пересечения треугольников в проецирующую прямую.

Задача 9.8. Определить угол между плоскостями, заданными треугольниками ABC и BCD . Применить способ вращения вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций. $A(85, 20, 30)$; $B(75, 10, 55)$; $C(50, 25, 25)$; $D(65, 45, 20)$.

Задача 9.9. Определить угол между плоскостями, заданными треугольниками ABC и BCD . Применить способ плоскопараллельного перемещения. $A(130, 30, 30)$; $B(120, 25, 50)$; $C(95, 40, 20)$; $D(110, 50, 20)$.

10. Построение проекций поверхностей по заданным условиям

Задача 10.1. Построить проекции сферы $R = 25$ мм, касающейся плоскости α в точке $K(35, ?, 15)$. $\alpha_x = 65$ мм. Следы направлены вправо от точки схода следов. $\alpha_{п1} \wedge OX = 40^\circ$. $\alpha_{п2} \wedge OX = 52^\circ$ (рис. П. 5.28).

Задача 10.2. Построить проекции трехгранной пирамиды $SABC$ высотой 70 мм, приняв треугольник ABC за ее основание. Высота пирамиды проходит через центр тяжести основания. Определить видимость. $A(40, 5, 55)$; $B(70, 35, 25)$; $C(10, 75, 0)$.

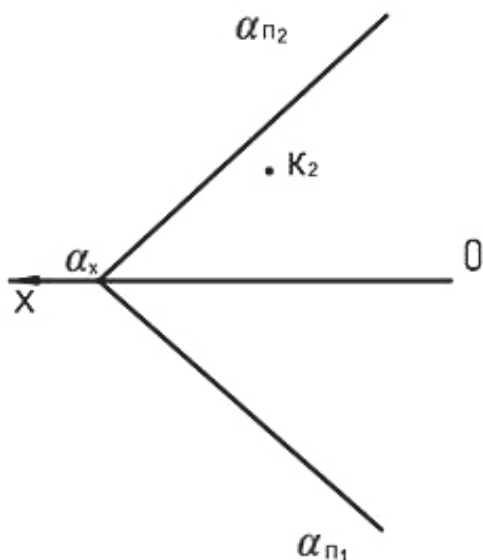


Рис. П.5.28. Иллюстрация к задаче 10.1

Задача 10.3. Построить проекции части сферы с центром в точке O , касающейся плоскости α : $O(55, 20, 35)$, $\alpha_x = 60$ мм. $\alpha_{\Pi_1} \wedge OX = 125^\circ$, $\alpha_{\Pi_2} \wedge OX = 40^\circ$ (рис. П.5.29).

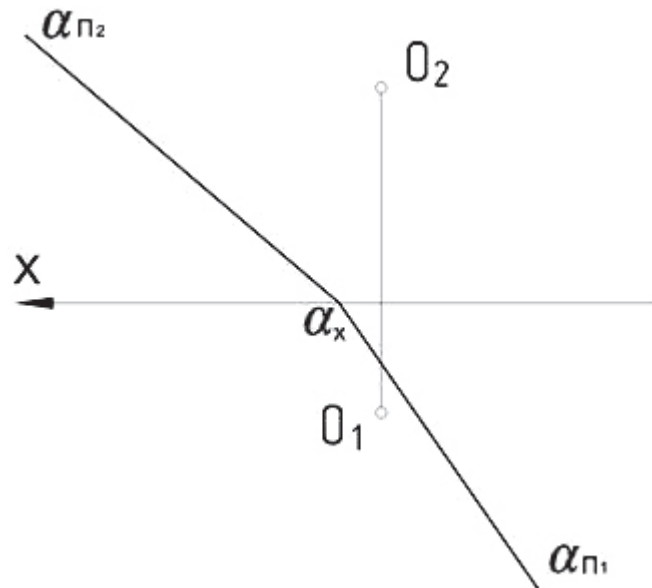


Рис. П. 5.29. Иллюстрация к задаче 10.3

Задача 10.4. Построить проекции прямой трехгранной призмы высотой 60 мм, приняв $\triangle ABC$ за ее основание. Найти точки пересечения отрезка MN с поверхностью призмы. Определить видимость. $A(70, 25, 5)$; $B(45, 5, 35)$; $C(35, 30, 15)$; $M(100, 25, 60)$; $N(20, 65, 5)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ПЛОСКОСТИ	5
1.1. Простейшие поверхности вращения	7
1.2. Простейшие гранные поверхности	9
1.3. Сечения поверхностей плоскостью	11
2. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ	26
2.1. Способ вспомогательных секущих плоскостей	26
2.2. Способ вспомогательных концентрических сфер	33
2.3. Развертки поверхностей	36
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	51
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	53
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Расчетно-графическая работа «Относительное положение плоскости и поверхности»	55
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Расчетно-графическая работа «Относительное положение поверхно- стей. Способ вспомогательных секущих плоскостей»	61
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Расчетно-графическая работа «Относительное положение поверхностей. Способ вспомогательных секущих концентрических сфер. Развертка поверхности»	71
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Оформление расчетно-графической работы	77
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Задачи для подготовки к текущему контролю знаний по дисциплине «Инженерная графика» (раздел «Начертательная геометрия»)	80

